



**Maria Isabel da Rocha
Ferreira Caiado**

**Expansões Assintóticas no Estudo da Estabilidade
de Sistemas Rapidamente Forçados**



**Maria Isabel da Rocha
Ferreira Caiado**

**Expansões Assintóticas no Estudo da Estabilidade
de Sistemas Rapidamente Forçados**

Tese apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Doutor em Matemática, realizada sob a orientação científica do Doutor Andrey Sarychev, Professor Catedrático do Departamento de Matemática para as Decisões da Universidade de Florença - Itália

o júri

presidente

José Manuel Lopes da Silva Moreira

Professor Catedrático da Universidade de Aveiro (por delegação da Reitora da Universidade de Aveiro)

vogais

Doutor **Andrey Sarychev**

Professor Catedrático da Universidade de Florença - Itália (orientador)

Doutor **Fernando Manuel Ferreira Lobo Pereira**

Professor Catedrático da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Doutora **Maria Paula Macedo Rocha Malonek**

Professora Catedrática do Departamento de Matemática da Universidade do Aveiro

Doutora **Lisa Maria Freitas Santos**

Professora Associada com Agregação da Escola de Ciências da Universidade do Minho

Doutor **Alexander Plakhov**

Professor Associado Convidado com Agregação da Universidade de Aveiro

agradecimentos

No desenrolar do meu trabalho de doutoramento pude contar com o apoio de diversas pessoas e instituições.

Agradeço ao Professor Doutor Andrey Sarychev a sua disponibilidade, paciência demonstrada e motivação transmitida ao longo deste percurso. Um especial reconhecimento por todas as oportunidades que me proporcionou de contactar diferentes pessoas e grupos de investigação.

Gostaria de expressar, também, o meu agradecimento à Universidade do Minho com particular destaque ao Departamento de Matemática e ao Centro de Matemática nas pessoas dos seus sucessivos directores e na pessoa da Doutora Joana Soares por sempre me terem dado total liberdade nas minhas opções científicas.

Uma palavra de agradecimento à Universidade de Aveiro por me ter aceite como aluna e me ter disponibilizado as melhores condições para a realização do meu trabalho. Não posso deixar de mencionar em especial o Departamento de Matemática e os Serviços de Documentação. Também não posso esquecer o Doutor Vítor Neves, o Delfim e o Eugénio.

Parte substancial do trabalho agora apresentado foi realizado durante as minhas longas estadias junto do *Dipartimento di Matematica per le Decisioni* da Universidade de Florença. Agradeço, em particular, aos professores Galeotti, Gori e Zezza a disponibilidade com que me receberam. À *Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati* (SISSA), na figura do grupo de Análise Funcional, agradeço por me ter deixado espreitar o seu admirável mundo da matemática.

Ao Departamento de Matemática e ao Centro de Matemática da Universidade do Minho, à Unidade de Investigação Matemática e Aplicações da Universidade de Aveiro (POCTI/MAT/ 41683/01), ao Control Training Site (Marie Curie) e à a Fundação Calouste Gulbenkian agradeço o apoio financeiro para as minhas deslocações.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática da Universidade do Minho: um muito obrigada especial à Lucia, à Lucile, ao Mena, ao Salvatore e, claro, a Ana Vale pelo seu persistente apoio!

A todos os que sempre estiveram presentes... mesmo nas minhas longas ausências. À São, pelo apoio moral vindo do frio. À Brigida e à Susana, pela forma calorosa como que receberam na minha chegada a Florença. Grazie Costanza, Simona e Teresa per tutte le nostre chiacchiere! Aos amigos de sempre, pela amizade, entusiasmo, apoio e presença constante. Ao Rolo que sempre me acompanhou lado a lado nesta longa jornada. A todos muito obrigada.

palavras-chave

equações diferenciais, cálculo cronológico, expansões assintóticas, estabilidade de Lyapunov, método de medianização.

resumo

Neste trabalho estuda-se a estabilização de sistemas descritos por equações diferenciais. Usando técnicas do Cálculo Cronológico, introduzido na última década de 70 nos trabalhos de A.A. Agrachev e R.V. Gamkrelidze, estuda-se a estabilização da equação de pequenas oscilações de um pêndulo duplo invertido na vizinhança do seu equilíbrio vertical, normalmente instável, quando sujeito a uma oscilação rápida e arbitrária. São considerados os casos planares e esférico. Analisa-se, também, uma classe de sistemas elásticos descritos por equações diferenciais parciais (hiperbólicas). O exemplo considerado é o de uma corda vibrante sujeita a uma perturbação linear. Estabelecem-se condições para a estabilidade e estabilização assintótica quando, ao sistema, é aplicado um controle vibracional. São considerados os casos de presença e ausência de atrito. As técnicas de medianização e do Cálculo Cronológico são estendidas para o estudo de sistemas descritos por equações às derivadas parciais.

keywords

differential equations, chronological calculus, asymptotic expansions, Lyapunov stability, averaging methods.

abstract

Using tools from Chronological Calculus introduced in 1970 by A.A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze, in this Ph.D thesis we study stability properties of small oscillations of a double inverted pendulum near its, usually unstable, upper equilibrium position. We assume that the pendulum is subject an arbitrary fast oscillation. Both, planar and spherical cases are considered.

We also analyze a class of elastic systems described by a (hyperbolic) partial differential equation. Our working example is the equation of a vibrating string subject to linear disturbance. We establish conditions for stabilization and asymptotic stabilization by applying a vibrating control to the string. In the first situation studied we assume that system is subject to a damping force; next we consider the system without damping. We extend the tools from averaging and from Chronological Calculus for studying stability of systems described by partial differential equations.

Conteúdo

Lista de símbolos	ix
Introdução	1
1 Preliminares	7
1.1 Variedades diferenciáveis	7
1.1.1 Definição	7
1.1.2 Aplicações diferenciáveis	9
1.1.3 Espaço tangente e espaço co-tangente	9
1.1.4 Derivações	11
1.1.5 Campos vectoriais	12
1.1.6 Formas diferenciais e volume	14
1.2 $C^\infty(V)$ e a sua estrutura	16
2 Cálculo cronológico	19
2.1 Representação de V em $C^\infty(V)$	20
2.2 Famílias de funcionais e operadores	22
2.3 Exponencial cronológica	24
2.3.1 Definição e representação em série	25
2.3.2 Exponencial cronológica à esquerda	26
2.3.3 Unicidade de solução do problema de Cauchy	27
2.3.4 Expansão assintótica	27
2.4 Logaritmo cronológico	28
2.5 Propriedades da exponencial cronológica	29
2.5.1 Campos autónomos	31
2.5.2 Campos quase-autónomos	32
2.6 Fórmula da variação das constantes	33
2.7 Derivada do fluxo em ordem a um parâmetro	35
2.8 Logaritmo não cronológico	36
2.8.1 Expansão via integração	38
2.8.2 Expansão via produto cronológico	41
2.8.3 Expansão assintótica	44
2.9 Comentário	44

3	Estabilidade e controle	45
3.1	Estabilidade no sentido de Lyapunov	45
3.2	Sistemas periódicos e teorema de Floquet	46
3.3	Método da medianização	48
3.4	Controle	50
3.5	Comentário	54
4	Pêndulo duplo invertido	55
4.1	Sistema mecânico	55
4.2	Matriz de monodromia	57
4.3	Análise da estabilidade	61
4.4	Pêndulo esférico	64
4.4.1	Pêndulo esférico simples	64
4.4.2	Pêndulo esférico duplo	65
5	Equação da onda	67
5.1	Os espaços e as normas	67
5.2	O problema	68
5.3	Estabilização na presença de atrito	70
5.4	Estabilização na ausência de atrito	76
5.5	Comentário	79
6	Pêndulo num kart	81
6.1	O modelo matemático	81
6.2	Conceitos e resultados auxiliares	82
6.3	Análise da controlabilidade	84
6.3.1	Família <i>bracket-generating</i>	85
6.4	Comentário	87
A	Expansões assintóticas	89
B	Pêndulo num kart: análise dos campos de \mathcal{F}	93
B.1	Dependência linear dos campos	94
B.1.1	Campos X_2 e X_4 : região Γ	94
B.1.2	Campos X_1 e X_3 : região Υ	94
B.2	Análise da invariância	95
B.2.1	Invariância de Γ	95
B.2.2	Invariância de Υ	97
B.2.3	Invariância de Σ	98
	Referências bibliográficas	103
	Índice remissivo	107

Lista de símbolos

$\text{Der } V$	álgebra das derivações em V , página 22
\mathfrak{C}	álgebra das séries cronológicas, página 26
$C^\infty(V)$	conjunto das aplicações reais e diferenciáveis na variedade V , página 16
$\mathfrak{L}_m(\lambda)$	conjunto das séries de Laurent na variável λ com coeficientes em \mathfrak{C} , página 38
$\Lambda^k V$	conjunto das formas diferenciais de grau k de V , página 15
$\text{Vec } V$	conjunto dos campos vectoriais diferenciáveis na variedade V , página 13
$L_2(\Omega)$	conjunto das funções definidas em Ω de quadrado integrável, página 67
$W_2^m(\Omega)$	conjunto dos elementos de $L_2(\Omega)$ que possuem derivada generalizada até à ordem m em $L_2(\Omega)$, página 67
$\text{Dif } V$	conjunto dos difeomorfismos $\Phi : V \rightarrow V$, página 9
F_{*p}	diferencial de F em p , $F_{*p} \equiv D_p F$, página 11
$\overleftarrow{\exp}$	exponencial cronológica à esquerda, página 26
$\overrightarrow{\exp}$	exponencial cronológica à direita, página 25
$T_p^* V$	espaço co-tangente da variedade V em p , página 10
$T_p V$	espaço tangente à variedade V em p , página 10
$T^* V$	fibrado co-tangente, página 10
TV	fibrado tangente, página 10
$\overleftarrow{\log}$	logaritmo cronológico à esquerda, página 29
$\overrightarrow{\log}$	logaritmo cronológico à direita, página 29
$(X * Y).$	produto cronológico, página 42
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno em $L_2(\Omega)$, página 67
$[X, Y]$	parêntesis de Lie dos campos vectoriais X, Y , página 14
$F^* f$	<i>pull-back</i> de f por F , página 9

$\text{Ad } P$	representação adjunta, página 22
$\text{ad } X$	representação adjunta, página 24
V	variedade diferenciável, página 8

Uma língua é o lugar donde se vê o Mundo e em que se traçam os limites do nosso pensar e sentir. Da minha língua vê-se o mar. Da minha língua ouve-se o seu rumor, como da de outros se ouvirá o da floresta ou o silêncio do deserto.

Virgílio Ferreira

Introdução

Diversos fenómenos de áreas da ciência como a física, a biologia ou a economia são descritos por equações diferenciais não autónomas da forma

$$\dot{p}(t) = X(p, t)$$

com $p \in V$, V uma variedade, e $t > 0$ representando a variável tempo. Caso seja possível actuar no sistema, por exemplo, por aplicação de forças externas, o modelo matemático ganha um parâmetro funcional que reflecte a actuação externa. Este parâmetro designa-se por *controlo* e o sistema passa a ser descrito por

$$\dot{p}(t) = X(p, t; u(t))$$

com $p \in V$ e $t > 0$, $u(t) \in U$ onde u é o controlo e U o espaço dos controlos. A área da matemática que estuda estes sistemas é a *Teoria Matemática do Controlo*. Um problema típico da teoria do controlo é determinar o conjunto de pontos que pode ser atingido de um ponto inicial $p_0 \in V$ escolhendo diferentes valores de $u(t) \in U$ e alternando entre estes valores de u . Este problema é designado por *controlabilidade*. Um outro problema recorrente da teoria do controlo é o de estabelecer condições, sobre o controlo $u \in U$, de forma a que as soluções da equação diferencial parametrizada por $u \in U$ satisfaçam determinadas propriedades, por exemplo serem estáveis. Aqui, a teoria do controlo cruza um outro campo de estudo da matemática: a Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais.

Pode-se considerar que a teoria qualitativa das equações diferenciais nasce em finais do século XIX com os trabalhos de Poincaré¹(1854–1912) e Lyapunov² (1857-1918). Recorrendo a métodos geométricos, Poincaré estabelece uma teoria sobre o comportamento das soluções de equações diferenciais de segunda ordem e resolve diversos problemas sobre a dependência de soluções de um parâmetro. Por seu lado, Lyapunov estuda o comportamento das soluções numa vizinhança de pontos de equilíbrio generalizando o conceito de energia e função de energia. A ele se deve a teoria da *estabilidade* apresentada de forma sucinta no Capítulo 3. A teoria qualitativa, fundada por Poincaré, é aprofundada por Birkhoff (1884–1944) que estabelece diversos factos sobre a teoria qualitativa de sistemas de equações diferenciais de ordem superior³, [Bir99].

Parte substancial dos fenómenos modelados por equações diferenciais têm um comportamento oscilatório. Está-se a falar de, por exemplo, dinâmica populacional (presa/predador),

¹H. Poincaré, “Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste”, 1-3, Blanchard (1987)

²A.M. Lyapunov, “Stability of motion”, Acad. Press (1966) (Translated from Russian)

³G.D. Birkhoff, “Surface transformations and their dynamical applications” Acta Math., 43 (1922) pp. 1-119

ondas electromagnéticas, ondas neurológicas e tantos outros. Historicamente, a análise dos *movimentos oscilatórios* inicia-se com o estudo do pêndulo, em finais século XVI, com os trabalhos de Galileu (1564–1642) seguido por Huygens (1629–1695) e Newton (1643–1727). Inicialmente, o estudo das oscilações caracterizava-se pela análise de sistemas descritos por equações diferenciais lineares de coeficientes constantes pelo que era designada por *teoria das oscilações lineares*. O problema fundamental era construir soluções periódicas e quase-periódicas dos sistemas e compreender as suas propriedades. Embora o estudo das oscilações lineares tivesse prosseguido, o estudo das oscilações não lineares era feito segundo processos lineares sendo a parte não linear ignorada sem aparente justificação. Note-se que a presença de não linearidades pode exercer um efeito cumulativo: embora a análise do comportamento de um sistema não linear num período se possa assemelhar ao comportamento de oscilações harmónicas, analisando as mesmas oscilações num longo intervalo de tempo (em comparação com o período) encontrar-se-iam diferenças substanciais devido a pequenos desvios do sistema em relação ao caso linear. Uma outra dificuldade do caso não linear advém do facto do princípio da sobreposição não ser válido. Assim, a análise das diferentes oscilações harmónicas que compõem o movimento não tem qualquer significado. Os primeiros estudos sobre sistemas não lineares devem-se a Ostrogradsky (1801–1862), Helmholtz (1821–1894) e Rayleigh (1842–1919).

Considera-se uma oscilação não linear como suficientemente próxima a uma oscilação linear quando depende de um parâmetro pequeno que, ao se anular, torna a equação numa equação linear, [BM61]. Esta abordagem estava já presente nos trabalhos realizados pelos astrónomos na análise dos movimentos planetários no séc. XIX. Com efeito, foi o interesse da *mecânica celeste* pela influência exercida pela Lua sobre o movimento de rotação da Terra que conduziu ao estudo de *pequenas perturbações*. Os métodos desenvolvidos neste âmbito são essenciais para o tão estudado *problema dos três corpos*, onde o que está em estudo são movimentos planetários descritos por equações diferenciais com um parâmetro pequeno correspondente à massa de um dos corpos. Quando este parâmetro é nulo, o problema degenera no *problema dos dois corpos*. É nos trabalhos de Lagrange (1736–1813) e Laplace (1749–1827) que é considerada, pela primeira vez, a presença de pequenas perturbações. Também Gauss (1777–1855) e Poisson (1781–1840) contribuíram para este estudo.

A utilização de expansões em série comportava dificuldades para o estudo das pequenas perturbações uma vez que, termos obtidos nas expansões, continham potências da variável tempo. Assim, o desenvolvimento da solução em potências do parâmetro revelou-se ineficaz no estudo de movimentos em longos períodos de tempo pois, a presença de tais potências dificulta a identificação de soluções periódicas. Lagrange e Laplace propuseram alguns métodos para superar a existência desses termos, normalmente designados por *termos seculares*. Como é sabido, o desenvolvimento de uma função em série é, com frequência, divergente. No entanto, fórmulas aproximadas recorrendo a um número pequeno de termos revelam-se úteis para computação. De facto, as séries em causa são assintóticas no sentido em que o erro na aproximação k é proporcional a potência $k + 1$ do parâmetro pequeno, pelo que o erro pode ser tomado tão pequeno quanto se deseje. Um papel importante no desenvolvimento da teoria das perturbações foi o de Van-der-Pol (1926) quando propôs o método dos coeficientes de variação lenta, que envolvia a representação da equação em estudo por funções harmónicas cujas amplitudes e fases são funções “lentas” do parâmetro tempo. A teoria das oscilações e a teoria das perturbações são complementares no seu desenvolvimento.

Paralelamente à teoria das oscilações, a teoria dos sistemas lineares de equações diferenciais de coeficientes periódicos também foi sendo desenvolvida. Os movimentos periódicos traduzem o caso mais simples dos movimentos oscilatórios. Uma contribuição importante nesta área deve-se a Lyapunov e a Poincaré. Recorrendo à *transformação de Lyapunov*, um sistema de coeficientes periódicos reduz-se a um sistema de coeficientes constantes. Na literatura actual, o estudo de sistemas lineares de equações diferenciais de coeficientes periódicos aparece sob a designação de *teoria de Floquet* (1847–1920) em honra ao matemático francês que em 1883 publicou um estudo sobre sistemas lineares com coeficientes periódicos, [Flo83]. Uma reformulação desta teoria para o caso de sistemas não lineares periódicos é feita por Sarychev em [Sar01a].

Com N.M. Krylov (1879–1955) e Bogoliubov (1909–1992) a *teoria das oscilações não lineares* ganha contornos de uma teoria geral. Estes autores desenvolveram um método assintótico que permite obter melhores aproximações continuando a recorrer aos métodos da teoria das perturbações. O método baseia-se no *princípio da medianização*: a equação diferencial em estudo é substituída por uma equação medianizada, [BM61]. Também Verhulst e co-autores se dedicaram ao estudo das técnicas de medianização. Ambos os grupos estudam medianizações até à segunda ordem, pois como nota Krylov *et al.*, aproximações de ordem superior raramente são usadas dado o rápido aumento da complexidade da sua construção. Note-se que a *teoria da medianização* estava já presente, embora sem prova de validade, nos trabalhos de Lagrange, [Ver90].

É a Poincaré que se deve o conceito de *expansão assintótica e série assintótica* introduzido, sempre, no âmbito da mecânica celeste. A *análise assintótica* é o ramo da análise que procura soluções analíticas aproximadas para problemas que envolvam um parâmetro (ou variável) que seja “pequeno” ou “grande” ou ainda quando a solução está numa vizinhança de um ponto onde a solução não é analítica. As expansões assintóticas continuam a desempenhar um papel importante. Efectivamente, nem todos os problemas admitem soluções exactas, contudo as soluções podem ser obtidas como aproximações assintóticas. O objecto de estudo da análise assintótica não se restringe a soluções de equações diferenciais mas também abrange soluções de equações integrais, cálculo de integrais ou mesmo o cálculo de valores de funções representadas por séries que, sendo divergentes, permitem o cálculo do valor da função com grande precisão, [Mur84]. Refira-se que os *métodos assintóticos* foram desenvolvidos no âmbito dos sistemas dinâmicos conservativos não podendo ser aplicados ao estudo de sistemas oscilatórios não lineares sem generalização uma vez que estes são maioritariamente não conservativos.

Dos diferentes tipos de expansão assintótica, as *séries de Volterra* têm particular relevância no presente trabalho. Estas séries foram introduzidas por Volterra em finais do século XIX tendo tido grande aceitação no campo da engenharia eléctrica como forma de modelar o comportamento não linear dos sistemas. São uma generalização, ao caso não autónomo, do produto convolução comum no estudo de sistemas lineares autónomos. Recorrendo a esta teoria, um sistema não linear pode ser descrito como uma soma infinita de integrais multidimensionais. É recorrendo às séries de Volterra e à *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff* que Agrachev e Gamkrelidze desenvolvem o *Cálculo Cronológico* a que este trabalho se refere no Capítulo 2. Esta é uma ferramenta que aparece no contexto da teoria matemática do controlo

e que formaliza a solução de uma equação diferencial não linear e não autónoma na forma exponencial. O percurso das ideias exploradas por estes autores é Magnus quando em [Mag54] estuda a forma exponencial da solução de uma equação diferencial linear não autónoma (recorrendo à fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff). Igualmente, Brockett, [Bro76], mostra que equações diferenciais com controlo, analíticas no estado e lineares no controlo admitem soluções na forma de série de Volterra desde que o tempo de escape(fuga) não seja finito para a equação não controlada. É, no entanto, no trabalho de Agrachev e Gamkrelidze que é formalizado o conceito de solução de uma equação diferencial não linear e não autónoma como exponencial cronológica que, os autores mostram, ser de facto uma expansão assintótica, [AG79].

No âmbito da teoria das oscilações, uma área que está em franco desenvolvimento nos anos mais recentes, é o estudo dos movimentos vibracionais. Quando a frequência de um movimento é grande comparativamente com o seu período está-se perante o que, na literatura, é designado por *movimento vibracional*, [Ble00, Mee80]. O estudo deste movimentos subdivide-se em duas áreas: a da mecânica vibracional e a do controlo vibracional. Dado o interesse quer teórico quer das aplicações, um sistema que tem sido considerado nesses estudos é o de um pêndulo cujo eixo vertical é sujeito a uma oscilação rápida e forçada. Infelizmente, muita da bibliografia referente aos primeiros trabalhos nesta área encontra-se publicada unicamente em língua russa, tornando difícil o acesso à mesma. Tanto quanto é do conhecimento da autora, na bibliografia disponível o sistema estudado é o *pêndulo paramétrico* isto é, o sistema está sujeito a uma *vibração harmónica* (vide [BGG02]).

No presente trabalho explora-se a aplicabilidade das técnicas referidas anteriormente ao estudo da estabilidade, no sentido de Lyapunov, de movimentos oscilatórios. Uma diferença substancial relativamente aos trabalhos referidos anteriormente reside no facto de a vibração forçada ser não harmónica. Também aqui, o caso em estudo é o de um pêndulo. Assim, o Capítulo 4 é dedicado ao estudo da estabilização da equação das pequenas oscilações de um *pêndulo* sujeito a uma oscilação rápida forçada não harmónica. A primeira situação considerada é a de um pêndulo duplo planar. Uma vez que o sistema é não autónomo, recorre-se às técnicas do cálculo cronológico para obter a *transformação de monodromia* do sistema e a expansão assintótica do seu logaritmo. Constata-se que o primeiro termo desta expansão coincide com a medianização da transformação de monodromia. A análise os valores próprios da primeira medianização e do erro resultante da truncatura da expansão assintótica do seu logaritmo permite concluir sobre a estabilidade do sistema. O sistema é estável desde que a frequência da oscilação não harmónica imposta seja suficientemente grande. No mesmo capítulo, considera-se, ainda, o problema análogo para o pêndulo esférico. São analisados os casos simples e duplo.

A passagem ao estudo de um *sistema elástico*, apresentado no Capítulo 5, surge como uma consequência natural do trabalho realizado no Capítulo 4. Com efeito, o modelo considerado é o de uma corda sujeita a uma *perturbação linear* e este sistema pode ser “decomposto” num número infinito de pêndulos. Esta decomposição formal num sistema de dimensão infinita de equações diferenciais ordinárias permite a aplicação, pelo menos a uma parte finita designada por *aproximação de Galerkin*, das técnicas aplicadas no estudo do pêndulo. No entanto há que não esquecer a parte “infinita” e o seu contributo para o comportamento do sistema. Nesta fase há duas abordagens distintas dependendo da presença, ou não de atrito. No primeiro

caso recorre-se a um controlo *state feedback* não autónomo. Na ausência de atrito considera-se um controlo *output feedback* não autónomo. Em ambas as situações recorre-se a uma função do tipo de Lyapunov para a análise da “parte infinita” da solução.

A última parte desta tese, o Capítulo 5, é dedicado ao problema da controlabilidade. O exemplo em estudo é o de um *pêndulo num kart*, mostrando-se que este sistema é controlável. As técnicas utilizadas neste estudo são as da teoria geométrica do controlo com particular destaque para o teorema de Hermann-Nagano. Um conceito fundamental para esta análise é o de família de campos vectoriais *bracket generating* (BG), isto é, um conjunto de campos vectoriais cuja álgebra de Lie num ponto coincide com o espaço tangente no mesmo ponto à variedade onde os campos estão definidos.

Ao longo do trabalho, tal como acontece na primeira página, em nota de rodapé estão algumas referências bibliográficas que não foram incluídas na bibliografia por não ter sido possível a sua consulta. Encontrar-se-ão, também, alguns termos em inglês, tendo-se optado por não utilizar uma sua tradução por estes serem comuns na literatura em português.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é dedicado à formalização das designações a usar ao longo do trabalho. Pretende essencialmente fixar a notação e a terminologia a ser usada, sobretudo, no âmbito do cálculo cronológico.

Em [Lan72] encontra-se uma introdução detalhada às variedades. Outras referências importantes são [Mil97], [BJ82] e [War83].

1.1 Variedades diferenciáveis

1.1.1 Definição

Seja V um *espaço topológico de Hausdorff*¹, isto é, para quaisquer dois pontos distintos p_1, p_2 de V existem vizinhanças U_1 e U_2 de p_1 e p_2 , respectivamente, tais que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Suponha-se ainda que V é para uma *espaço topológico paracompacto*, ou seja, para toda a família $\{U_i\}_{i \in I}$ de abertos de V , de união V , existe uma família localmente finita $\{\tilde{U}_j\}_{j \in J}$ de abertos de V , ainda com união V , tal que, para cada $j \in J$ existe um $i \in I$ tal que $\tilde{U}_j \subset U_i$. Recorde-se que a família de abertos $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ se diz *localmente finita* se, para todo o $p \in V$, existir um aberto $X \subseteq V$ com $p \in X$ tal que $X \cap U_j = \emptyset$ excepto para um número finito de elementos de \mathcal{U} .

Um *sistema de coordenadas*, ou carta, de V em p com domínio U é uma aplicação injectiva $\varphi : U \subseteq V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$ e $\varphi(U)$ é aberto em \mathbb{R}^n ; escreve-se (φ, U) . Denotando $\varphi(p)$ por $(x_1(p), \dots, x_n(p))$ onde x_1, \dots, x_n são designadas por coordenadas de p , cada coordenada x_i é uma aplicação contínua em U . Para quaisquer sistemas de coordenadas $(\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2)$ tais que $U = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ as restrições de φ_1, φ_2 a U são homeomorfismos, isto é, as restrições de φ_1, φ_2 a U são bijecções nos abertos $\varphi_1(U), \varphi_2(U)$ de \mathbb{R}^n tais que φ_i e φ_i^{-1} são contínuas. Assim $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ e $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ são aplicações de abertos de \mathbb{R}^n para abertos de \mathbb{R}^n . Dois sistemas de coordenadas são compatíveis se, escrevendo as coordenadas das aplicações como $(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_n(x_1, \dots, x_n))$, cada uma das aplicações $y_i(x_1, \dots, x_n)$ for continuamente diferenciável em cada um dos argumentos x_j .

Um *atlas* em V é um conjunto de sistemas de coordenadas compatíveis em V que cobrem V , isto é,

$$\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i) : i \in I\},$$

¹Também se diz espaço topológico separado

sendo I um conjunto de índices, tal que todos os contradomínios de sistemas de coordenadas estão contidos no mesmo espaço euclidiano \mathbb{R}^n , $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ é carta de V , $\bigcup_{i \in I} U_i = V$ e se $(\varphi_i, U_i), (\varphi_j, U_j) \in \mathcal{A}$ e $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ então

- a) $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ e $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ são subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n ,
- b) $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ é um homeomorfismo.

A aplicação inversa de um sistema de coordenadas diz-se uma *parametrização* ou uma *co-carta*. A composição de sistemas de coordenadas e parametrizações diz-se *mudança de coordenadas* ou função de transição.

Definição 1.1 (Estrutura diferenciável). *Uma estrutura diferenciável em V é um atlas de V que não seja subconjunto próprio de qualquer outro atlas (é maximal) e cujas mudanças de coordenadas são de classe C^∞ .*

O par (V, \mathcal{A}) , onde \mathcal{A} é uma estrutura diferenciável em V em que todos os contradomínios de cartas da estrutura diferenciável são subconjuntos do espaço euclidiano \mathbb{R}^n , designa-se por variedade diferenciável de dimensão n .

A definição seguinte sintetiza o que acima se introduziu apresentando formalmente o conceito de variedade diferenciável de dimensão n .

Definição 1.2 (Variedade diferenciável). *Uma variedade diferenciável V de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff paracompacto munido de uma estrutura diferenciável: V é coberta por um sistema de subconjuntos abertos*

$$V = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

designados por vizinhanças coordenadas, estando definido em cada uma um homeomorfismo

$$\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

designado por sistema de coordenadas locais, tal que as composições

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^n$$

são difeomorfismos.

Definição 1.3 (Sub-variedade). *Seja W uma parte da variedade V (não necessariamente diferenciável) de dimensão n . Se a família de sistemas de coordenadas $\{\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ tal que $\varphi(U \cap W)$ é um aberto de um sub-espaço de \mathbb{R}^n constituir um atlas de W , diz-se que W é uma sub-variedade de V .*

Ao longo deste trabalho, o termo variedade será sinónimo de variedade diferenciável na qual se subentenderá uma estrutura diferenciável. Assinale-se que alguns autores, por exemplo [Mac91], utilizam o termo *suave* em vez do termo *diferenciável* para designar um ente de classe C^∞ .

1.1.2 Aplicações diferenciáveis

Seja A um aberto da variedade V . A aplicação $f : A \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se diferenciável se, para todo o sistema de coordenadas (φ, U) em V , a aplicação $f \circ \varphi^{-1}$ for diferenciável como função do aberto $\varphi(U \cap A) \subset \mathbb{R}^n$ para \mathbb{R} .

Dadas duas variedades V e W , de dimensão m e n respectivamente, uma aplicação contínua $F : V \rightarrow W$ diz-se *diferenciável* se, para toda a aplicação f diferenciável em W , $f \circ F$ for diferenciável em V . É usual designar-se a composição $f \circ F$ por *pull-back* de f por F e denotar-se F^*f .

Uma curva $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow V$ é diferenciável se $\alpha^*f = f \circ \alpha$ for diferenciável em I para toda a aplicação diferenciável f em V . Em termos de parametrizações, tem-se que α é diferenciável se e só se $\varphi \circ \alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ for diferenciável para todo o sistema de coordenadas (φ, U) em V .

A aplicação $F : V \rightarrow W$ diz-se um *difeomorfismo* se for uma bijecção de classe C^∞ e a sua inversa $F^{-1} : W \rightarrow V$ também for de classe C^∞ . O conjunto de todos os difeomorfismos da variedade V , $\Phi : V \rightarrow V$, denota-se por $\text{Dif } V$. Uma aplicação definida numa sub-variedade diferenciável N , $F : N \subset V \rightarrow V$, diz-se um *mergulho* se $F(N) \subset V$ for ainda uma sub-variedade diferenciável e $F : N \rightarrow F(N)$ for um difeomorfismo.

Um resultado clássico da geometria diferencial é o Teorema de Whitney¹. Com base neste teorema, diversos resultados (locais) sobre equações diferenciais em \mathbb{R}^n podem ser extendidos ao caso de equações em variedades.

Teorema 1.1 (Whitney). *Toda a variedade de dimensão n admite um mergulho num espaço euclidiano de dimensão apropriada.*

1.1.3 Espaço tangente e espaço co-tangente

Cada ponto de uma variedade diferenciável define um espaço vectorial real cuja dimensão é igual à da variedade; este espaço é o espaço tangente à variedade no ponto. Defina-se formalmente tal espaço.

Seja V uma variedade de dimensão n e seja α uma curva diferenciável em V com início em p , isto é, uma aplicação diferenciável

$$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$$

que verifica $\alpha(0) = p$.

Seja $C(p)$ o conjunto das curvas diferenciáveis em V com início em $p \in V$. Neste conjunto, defina-se uma relação de equivalência da seguinte forma: duas curvas com início em p , sejam α, β , são equivalentes se, para qualquer sistema de coordenadas (φ, U) de V em p ,

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha(t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \varphi \circ \beta(t) \right|_{t=0} \quad (1.1)$$

onde

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha(t) \right|_{t=0} = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \dots, \frac{d\alpha_n}{dt} \right).$$

Define-se, então, *vector tangente* à curva α em p como a classe de equivalência de tais curvas. Sendo $\alpha \in C(p)$ denota-se por $[\alpha]$ a sua classe de equivalência.

¹H. Whitney. Differentiable manifolds. Annals of Math. **37**(1936), n.º2, 645-680.

O *espaço tangente* à variedade V em p , denotado por $T_p V$, é o conjunto de todas as classes de equivalência definidas em $C(p)$ pela relação de equivalência (1.1). Desta forma, o espaço tangente à variedade em $p \in V$ é o conjunto dos vectores velocidade das curvas com início em p :

$$T_p V = \left\{ v = \frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=0} \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V \text{ diferenciável}, \alpha(0) = p \right\}.$$

Em $T_p V$ defina-se a adição e o produto por escalares. Definam-se estas operações recorrendo a sistemas de coordenadas.

Sejam $[\alpha], [\beta]$ dois vectores de $T_p V$ e (φ, U) um sistema de coordenadas de V em p . Assim,

$$[\alpha] = \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha(t) \Big|_{t=0}, \quad [\beta] = \frac{d}{dt} \varphi \circ \beta(t) \Big|_{t=0}.$$

Seja $s(t) = \varphi(p) + t([\alpha] + [\beta])$. Define-se a adição como

$$[\alpha] + [\beta] : t \mapsto (\varphi^{-1} \circ s)(t)$$

e o produto por escalares como

$$a[\alpha] : t \mapsto (\varphi \circ \alpha)(at), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Munido destas operações, $T_p V$ é um espaço vectorial real de dimensão n . Refira-se que cada sistema de coordenadas (φ, U) define uma bijecção de $T_p V$ para \mathbb{R}^n :

$$\bar{\varphi} : T_p V \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \bar{\varphi}([\alpha]) = \frac{d}{dt} \varphi \circ \alpha(t) \Big|_{t=0}.$$

A união disjunta dos espaços tangentes à variedade V em diferentes pontos

$$\bigcup_{p \in V} T_p V$$

é também ela uma variedade diferenciável cuja dimensão é $2n$, sendo n a dimensão de V . Esta variedade é designada por *fibrado tangente* da variedade V e é denotada por TV .

Recorde-se que, sendo E um espaço vectorial real de dimensão finita, o espaço dos funcionais lineares em E , $\xi : E \rightarrow \mathbb{R}$, tem a estrutura de um espaço vectorial. Este espaço designa-se por *dual* de E denota-se por E^* . Em particular, quando E é o espaço tangente à variedade V em p , $T_p V$, o seu dual $(T_p V)^*$ designa-se por *espaço co-tangente* de V em p e denota-se por $T_p^* V$. A união disjunta de todos os espaços co-tangentes designa-se por *fibrado co-tangente* de V

$$T^* V \stackrel{def}{=} \bigcup_{p \in V} T_p^* V.$$

O fibrado co-tangente é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, sendo n a dimensão de V . Os elementos de $T^* V$ designam-se por *co-vectores*.

Dadas duas variedades diferenciáveis e uma aplicação diferenciável entre elas é possível definir uma nova aplicação entre os seus espaços tangentes.

Definição 1.4 (Diferencial). *Seja $F : V \rightarrow W$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. O diferencial de F em $p \in V$ é a aplicação*

$$F_* : T_p V \rightarrow T_{F(p)} W$$

definida por

$$F_* \left(\frac{d\alpha}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} F(\alpha(t))$$

onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow V$ é uma curva diferenciável em V com início em p . É também usual a notação $D_p F$ para o diferencial de F em p .

A aplicação diferencial assim definida tem associada a aplicação entre espaços co-tangentes

$$F_p^* : T_{F(p)}^* W \rightarrow T_p^* V$$

definida por

$$F_p^* \xi = \xi \circ F_{*p}, \quad \xi \in T_{F(p)}^* W.$$

Tomando a reunião das aplicações F_{*p} para todo o $p \in V$ obtém-se uma aplicação entre os fibrados tangentes

$$F_* : TV \rightarrow TW$$

definida por

$$F_* v = F_{*p} v, \quad v \in T_p V$$

e designada por aplicação tangente.

Pelo diferencial F_* , um vector $v \in T_p V$ é transformado num vector $F_* v \in T_{F(p)} W$, enquanto que o co-vector $\xi \in T_{F(p)}^* W$ é “puxado” para o co-vector $F^* \xi \in T_p^* V$.

1.1.4 Derivações

Designa-se por $F(p)$ o conjunto das aplicações diferenciáveis definidas numa vizinhança aberta de $p \in V$. Munido com a adição usual de funções definida na intersecção dos domínios, $F(p)$ é um espaço vectorial real.

Definição 1.5 (Derivação). *Uma aplicação linear $\delta : F(p) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma derivação em p se satisfaz a regra de Leibniz*

$$\delta(fg) = f(p)\delta(g) + \delta(f)g(p), \quad (1.2)$$

para todas as aplicações $f, g \in F(p)$ onde fg denota o produto de aplicações.

Uma consequência imediata da definição de derivação é o facto de a derivação de aplicações constantes ser zero.

O espaço das derivações em p é isomorfo a $T_p V$. De facto, para cada $[\alpha]$ em $T_p V$ e f em $F(p)$ seja

$$\langle f, [\alpha] \rangle = \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) \Big|_{t=0}.$$

Esta acção está bem definida pois se α e $\bar{\alpha}$ são equivalentes então

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f \circ \bar{\alpha}(t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \bar{\alpha}(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \underbrace{(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)}_{\psi} \circ \bar{\alpha}(t) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} (f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi) \circ \alpha(t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f \circ \alpha(t) \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

Além disso, $[\alpha]$ actua linearmente sobre $F(p)$ e, atendendo à regra da derivação do produto de aplicações, é uma derivação.

Seja $\delta_{[\alpha]}$ a derivação induzida pelo par $f, [\alpha]$. Sejam, ainda, (φ, U) um sistema de coordenadas em p e α_i a curva definida por $\varphi^{-1}(\varphi(p) + t e_i)$. Então $\{[\alpha_i]\}_{i=1, \dots, n}$ é uma base para $T_p V$. Denotando $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ as coordenadas de p e $x = (x_1, \dots, x_n)$ um ponto de uma vizinhança de \bar{x} , para toda a função f em $F(p)$ tem-se

$$f \circ \varphi^{-1}(x) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i - \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^n b_{ij}(x)(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j) \quad (1.3)$$

onde $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$ e cada b_{ij} é uma função C^∞ numa vizinhança de \bar{x} . Assim,

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^n a_i(x_i(q) - \bar{x}_i) + \sum_{i=1}^n b_{ij}(x(q))(x_i(q) - \bar{x}_i)(x_j(q) - \bar{x}_j).$$

Ora, por definição de derivação em p ,

$$\delta((x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)b_{ij}) = (x_i(p) - \bar{x}_i)\delta((x_j - \bar{x}_j)b_{ij}) + \delta((x_i - \bar{x}_i))(x_j(p) - \bar{x}_j)b_{ij}(\bar{x}),$$

e $x(p) = \bar{x}$ donde $\delta((x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)b_{ij}) = 0$. Assim,

$$\delta f = \sum_{i=1}^n a_i \delta(x_i - \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^n \delta(x_i - \bar{x}_i) \delta_{[\alpha_i]}(f).$$

Pode-se então escrever

$$\delta = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{[\alpha_i]}$$

com $\lambda_i = \delta(x_i - \bar{x}_i)$; usualmente denota-se $\delta_{[\alpha_i]}$ por $\frac{\partial}{\partial x_i}$. Desta forma, $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ é uma base para o espaço das derivações e toda a derivação tem a forma

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Assim, para cada derivação δ em p existe um $[\alpha] \in T_p V$ tal que $\delta = \delta_{[\alpha]}$. Olhando para $T_p V$ como o espaço das classes de equivalência das curvas com início em p , denotam-se os seus elementos por $\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{t=0}$; olhando $T_p V$ como espaço das derivações, os seus elementos são denotados por $\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Assim,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{se e só se} \quad \delta_{[\alpha]} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{[\alpha_i]}.$$

1.1.5 Campos vectoriais

Definição 1.6 (Campo vectorial). *Um campo vectorial X definido na variedade diferenciável V é uma aplicação*

$$p \mapsto X(p) \in T_p V, \quad p \in V$$

que associa a todo o ponto $p \in V$ um vector tangente a V em p , $X(p)$. O campo X é diferenciável se for uma aplicação diferenciável da variedade diferenciável V para a variedade diferenciável TV .

Exemplo 1.1. *Seja $V = \mathbb{R}^n$. A aplicação*

$$X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad X(x) = Ax$$

onde A é um operador linear de \mathbb{R}^n para \mathbb{R}^k , é um campo vectorial em \mathbb{R}^n . Neste caso, diz-se que X é um campo vectorial linear.

O conjunto de todos os campos vectoriais diferenciáveis da variedade V denota-se por $\text{Vec } V$. Munido com a adição ponto a ponto de vectores

$$(\alpha X + \beta Y)(p) = \alpha X(p) + \beta Y(p), \quad p \in V \quad (1.4)$$

para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e todos os campos X e Y , $\text{Vec } V$ forma um espaço vectorial real.

Todo o campo vectorial $X \in \text{Vec } V$ é a derivada de funções no sentido que, dada uma função diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, $X(f)$ é uma aplicação diferenciável definida por

$$X(f)(p) = f_*(X(p))$$

para todo o $p \in V$. Obviamente, sendo $f, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ duas aplicações diferenciáveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, para todo o campo vectorial $X \in \text{Vec } V$ tem-se

$$X(\alpha f + \beta g) = \alpha X(f) + \beta X(g) \quad \text{e} \quad X(fg) = fX(g) + gX(f).$$

Em termos de coordenadas locais, diz-se que o campo vectorial X em V é diferenciável se, dado um sistema de coordenadas (φ, U) , X puder ser escrito como

$$X(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

onde as funções $X_i : p \in U \mapsto X_i(p) \in \mathbb{R}$ são diferenciáveis. Estas funções são designadas por coordenadas do campo vectorial X . Dada uma aplicação diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se

$$X(f) = Xf = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Mais ainda, uma vez que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f)(p) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f)(\varphi^{-1}(x)) = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi^{-1}(x))$$

para todo o $p \in U$, vem

$$X(f)(p) = \sum_{i=1}^n X_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Dados dois campos vectoriais X, Y de $\text{Vec } V$ que admitem representação em coordenadas locais, respectivamente,

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{e} \quad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

e uma qualquer aplicação diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, as aplicações $X(Yf)$ e $Y(Xf)$ estão bem definidas pois

$$X(Yf) = \sum_{i,j=1}^n X_i \left[\frac{\partial Y_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad \text{e} \quad Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^n Y_i \left[\frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} + X_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

onde todas as aplicações envolvidas são diferenciáveis. Tomando a diferença tem-se

$$X(Yf) - Y(Xf) = \sum_{i,j=1}^n \left[X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial f}{\partial x_j}. \quad (1.5)$$

A nova aplicação está bem definida e é única. Além disso, de acordo com a Definição 1.6, (1.5) é um campo vectorial.

Definição 1.7 (Parêntesis de Lie). *O parêntesis de Lie de dois campos vectoriais diferenciáveis X, Y da variedade V é o único campo vectorial $Z \in \text{Vec } V$ tal que, para toda a aplicação diferenciável $f : V \rightarrow \mathbb{R}$, se tem*

$$Zf = [X, Y](f) \stackrel{\text{def}}{=} X(Yf) - Y(Xf). \quad (1.6)$$

O parêntesis de Lie goza das seguintes propriedades, para todo o $X, Y, Z \in \text{Vec } V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\textbf{Anti-simetria} \quad [X, Y] = -[Y, X] \quad (1.7)$$

$$\textbf{Bilinearidade} \quad [X, \alpha Y + \beta Z] = \alpha[X, Y] + \beta[X, Z] \quad (1.8)$$

$$\textbf{Identidade de Jacobi} \quad [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \quad (1.9)$$

Note-se que se $[X, Y] = [Y, X]$, pela propriedade de anti-simetria, se tem $[X, Y] = 0$. Refira-se ainda que, o parêntesis de Lie de campos vectoriais lineares é ainda um campo vectorial linear e corresponde ao simétrico do comutador de matrizes

$$[X, Y](x) = -[A, B]x$$

quando $X(x) = Ax$ e $Y(x) = Bx$.

Com a adição dada por (1.4) e o produto dado pelo parêntesis de Lie (1.6), $\text{Vec } V$ tem a estrutura de uma álgebra real. Uma álgebra que satisfaça as propriedades (1.7)-(1.9) diz-se uma *álgebra de Lie*. Desta forma, $\text{Vec } V$ tem a estrutura de uma álgebra de Lie.

1.1.6 Formas diferenciais e volume

Esta secção tem por objectivo introduzir a noção de *volume* numa variedade. Para isso será necessário definir variedade orientada e formas diferenciais. Uma vez que formas diferenciais na variedade são formas exteriores no fibrado co-tangente da variedade, comece-se por introduzir a noção de forma exterior num espaço vectorial real.

Dado E , um espaço vectorial real de dimensão n e um inteiro k , uma *forma exterior* de grau k , ou uma k -forma em E , é uma aplicação $w : E^k \rightarrow \mathbb{R}$ multi-linear e anti-simétrica

$$\begin{aligned} w(v_1, \dots, \alpha v_i + \beta v'_i, \dots, v_k) &= \alpha w(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + \beta w(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k), \\ w(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) &= -w(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k) \end{aligned}$$

onde $v_i \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Na última igualdade os vectores das posições i e j trocaram de posição. O conjunto das k -formas em E munido com a operação de adição e de multiplicação por um escalar definidas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}(w_1 + w_2)(v_1, \dots, v_k) &= w_1(v_1, \dots, v_k) + w_2(v_1, \dots, v_k), \\ (\alpha w)(v_1, \dots, v_k) &= \alpha w(v_1, \dots, v_k), \quad v_i \in E, \alpha \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

tem a estrutura de um espaço vectorial. O conjunto de todas as formas exteriores de grau k definidas no espaço vectorial E denota-se por $\Lambda^k E$.

Sendo w_1 e w_2 duas formas exteriores de grau k_1 e k_2 , respectivamente, define-se o produto exterior por

$$w_1 \wedge w_2 : (v_1, \dots, v_{k_1+k_2}) \mapsto \frac{1}{k_1!k_2!} \sum_{\sigma} (-1)^{\nu(\sigma)} w_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k_1)}) w_2(v_{\sigma(k_1+1)}, \dots, v_{\sigma(k_1+k_2)})$$

onde a soma é feita sobre todas as possíveis permutações σ de ordem k_1+k_2 e $\nu(\sigma)$ é a paridade da permutação. Esta é uma generalização às variedades do produto exterior definido em \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.2. Sendo w_1 e w_2 duas formas de grau 1, para $v_1, v_2 \in E$, tem-se

$$w_1 \wedge w_2 : (v_1, v_2) \mapsto w_1(v_1)w_2(v_2) - w_1(v_2)w_2(v_1).$$

Uma aplicação diferenciável em $p \in V$

$$w : p \mapsto w_p \in \Lambda^k T_p V, \quad p \in V$$

diz-se uma *forma diferencial* de grau k , ou uma k -forma diferencial, na variedade V . O conjunto de todas as k -formas diferenciais em V denota-se por $\Lambda^k V$. Em particular, uma forma diferencial de grau 1 em V é uma aplicação diferenciável

$$p \mapsto w_p \in T_p^* V, \quad p \in V,$$

isto é, é uma família de aplicações lineares nos espaços tangentes dependendo diferenciavelmente de $p \in V$: $w_p : T_p V \rightarrow \mathbb{R}$; $\Lambda^1 V$ denota o espaço vectorial das 1-formas diferenciais em V .

Definição 1.8 (Forma de volume). No caso da n -forma diferencial $w \in \Lambda^n(V)$ nunca se anular em V , isto é, ser tal que $w_p \neq 0$, para todo o $p \in V$, diz-se que w é uma forma de volume.

Definida a forma de volume numa variedade, é agora possível definir variedade orientada. Comece-se por definir variedade orientável.

Definição 1.9 (Variedade orientável). A variedade V de dimensão n é orientável se existir uma colecção $\{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ de sistemas de coordenadas que cobrem V tal que, para todo o $i, j \in I$, o jacobiano da mudança de coordenadas $(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})$ é positivo para todo o $p \in U_i \cap U_j$.

Se $w_1, w_2 \in \Lambda^n(V)$ são formas volumes na variedade orientável V , diz-se que w_1 e w_2 definem a mesma orientação se, existe $a \in C^\infty(V)$, com $a(p) > 0$ para todo o $p \in V$, tal que $w_1 = aw_2$. A propriedade “definem a mesma orientação” é uma relação de equivalência no conjunto das formas de volume de V . Uma orientação para V é uma escolha de uma classe de equivalência $[w]$. Uma vez escolhida uma orientação, diz-se que V é uma *variedade orientada*.

Observação 1.1. *Alguns autores definem variedade orientável como uma variedade que possui uma forma de volume. De facto, esta definição e a adoptada no presente trabalho são equivalentes, [BT82].*

Numa variedade orientável V com orientação $[w]$, uma carta (φ, U) , com $\varphi(U) = U' \subset \mathbb{R}^n$, diz-se *orientada positivamente* se $\varphi_*(w|U)$ for equivalente à forma de volume usual $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in \Lambda^n(U')$.

O suporte de uma n -forma $w \in \Lambda^n V$ é o fecho do conjunto dos pontos $p \in V$ para os quais $w \neq 0$ e denota-se por $\text{supp } w$. É possível definir o integral de formas de suporte compacto.

Seja (φ, U) uma carta na variedade V e $w \in \Lambda^n V$ uma forma com suporte compacto. Caso $\text{supp } w \subset U$ considera-se $w|U$ cujo suporte é o mesmo. Então $\varphi_*(w|U)$ tem suporte compacto e pode-se definir o integral de w . Se $\varphi_*(w|U)$ tem suporte compacto $C \subset U$, onde (U, φ) é uma carta com orientação positiva, define-se

$$\int_\varphi w = \int \varphi_*(w|U).$$

Quando o suporte da forma w não está contido numa única carta é, ainda, possível definir o integral de n -formas na variedade $\int_V w$. Para isso recorre-se a *partições da unidade* em V , isto é, recorre-se a uma família $\{(\psi_i, O_i) : i \in J\}$ onde $\{O_i : i \in J\}$ é uma cobertura localmente finita de V , $\psi_i \in C^\infty(V)$, $\psi_i(p) > 0$ para todo o $p \in V$ e $\text{supp}(\psi_i) \subset U_i$ para todo o i , por último, para cada $p \in V$, $\sum_i \psi_i(p) = 1$. Se $\mathcal{A} = \{(\varphi_i, U_i) : i \in I\}$ for um atlas em V , uma partição da unidade subordinada a \mathcal{A} é uma partição da unidade $\{(\psi_i, O_i) : i \in J\}$ para a qual cada elemento O_i da cobertura é subconjunto de um domínio U_j . A variedade (V, \mathcal{A}) admite uma partição da unidade se existir uma partição da unidade subordinada ao atlas \mathcal{A} . Uma vez que, por definição, a variedade é Hausdorff, está garantido que admite uma partição da unidade.

Definição 1.10 (Integral). *Seja V uma variedade orientada de dimensão n , \mathcal{A} um atlas de cartas orientadas positivamente e seja $\Pi = \{(\psi_i, O_i)\}$ uma partição da unidade subordinada a \mathcal{A} . Então*

$$\int_\Pi w = \sum_i \int \psi_i w.$$

1.2 $C^\infty(V)$ e a sua estrutura

Considere-se o conjunto das aplicações reais e diferenciáveis em V , variedade diferenciável de dimensão n . Denote-se este conjunto por $C^\infty(V)$.

Em $C^\infty(V)$, defina-se a adição, a multiplicação e o produto por escalares pontualmente, isto é, sendo $\varphi, \psi \in C^\infty(V)$, $p \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\varphi + \psi)(p) = \varphi(p) + \psi(p) \tag{1.10}$$

$$(\varphi \cdot \psi)(p) = \varphi(p) \cdot \psi(p) \tag{1.11}$$

$$(\alpha \cdot \varphi)(p) = \alpha \cdot \varphi(p). \tag{1.12}$$

Munido com estas operações $C^\infty(V)$ é um espaço vectorial real.

Introduza-se em $C^\infty(V)$ uma topologia¹. Comece-se por considerar o conjunto das funções diferenciáveis em \mathbb{R}^N , $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, munido com a topologia da convergência uniforme em compactos de (todas) as derivadas de ordem menor ou igual a s . Isto é, sendo $s \geq 0$, $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto e $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, considere-se a família de semi-normas

$$\|\varphi\|_{s,K} = \sup \left\{ \left| \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \circ \cdots \circ \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \varphi(m) \right| : m \in K, 1 \leq i_1, \dots, i_l \leq N, 0 \leq l \leq s \right\}$$

Esta família de semi-normas define uma topologia em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Uma base local para esta topologia é dada pelos subconjuntos

$$\left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) : \|\varphi\|_{n,K_n} < \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

onde K_n , $n \in \mathbb{N}$ são de compactos tais que $K_n \subset K_{n+1}$ e $\bigcup K_n = \mathbb{R}^N$.

Para todo o $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ e qualquer $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto, diz-se que uma família de funções $t \mapsto \varphi_t \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, $t \in \mathbb{R}$ é

- *mensurável* se, para todo o $x \in \mathbb{R}^N$, $t \mapsto \varphi_t(x)$ é mensurável;
- *localmente integrável* se for mensurável e $\int_{t_0}^{t_1} \|\varphi_t\|_{s,K} dt < \infty$;
- *absolutamente contínua* em t se $\varphi_t = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \psi_t dt$ para alguma família localmente integrável de funções ψ_t ;
- *localmente limitada* em t se $\|\varphi_t\|_{s,K} \leq C(s, K)$, $t \in [a, b]$, $C(s, K)$ uma constante real.

O teorema de Whitney permite mergulhar a variedade V num \mathbb{R}^N , com N adequado. Assim, pode-se “importar” a topologia de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ para $C^\infty(V)$. Esta topologia é designada por *topologia de $C^\infty(V)$* . Munido com esta topologia, $C^\infty(V)$ é um *espaço de Fréchet*, isto é, um espaço topológico vectorial completo, metrizável e localmente convexo. Nesta topologia, a família de funções $\varphi_n \in C^\infty(V)$ converge para $\varphi \in C^\infty(V)$ quando $n \rightarrow \infty$ se e só se, para todo o $s > 0$ e todo o subconjunto compacto K de V ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{s,K} = 0.$$

Partindo da topologia de $C^\infty(V)$, podem-se definir famílias de semi-normas para matrizes, aplicações e campos vectoriais da seguinte forma,

$$A \equiv \{a_{ij}\} \text{ em } V : \|A\|_{s,K} = \sum_{j=1}^n \max_i \|a_{ij}\|_{s,K},$$

$$\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^r : \|\phi\|_{s,K} = \max_{1 \leq i \leq r} \|\phi_i\|_{s,K},$$

$$X \in \text{Vec } V : \|X\|_{s,K} = \sup\{\|\varphi X\|_{s,K} : \|\varphi\|_{s+1,K} = 1\}, \quad \varphi \in C^\infty(V),$$

$s \geq 0$ e K um subconjunto compacto de V .

Refira-se, ainda, que $C^\infty(V)$ é uma *álgebra real* pois, sendo $C^\infty(V)$ um espaço vectorial real no qual está definido um produto (1.11), tem-se para todo o $\varphi, \psi, \xi \in C^\infty(V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(\psi\xi) &= (\varphi\psi)\xi \\ (\varphi + \psi)\xi &= \varphi\xi + \psi\xi \\ \alpha(\varphi\psi) &= (\alpha\varphi)\psi = \varphi(\alpha\psi). \end{aligned}$$

¹Para uma exposição detalhada ver, por exemplo, [Rud91]

Capítulo 2

Cálculo cronológico

O cálculo cronológico foi introduzido em 1978 por Agrachev e Gamkrelidze no âmbito da teoria matemática do controlo para estudar equações diferenciais não lineares e não autónomas em variedades diferenciáveis, [AG79]. Pretende superar dificuldades decorrentes do facto de, em diferentes instantes, campos vectoriais não autónomos não comutarem. Posteriormente, em [AG81], os autores exploram a noção de álgebra cronológica. No caso de campos vectoriais não autónomos, esta álgebra corresponde à álgebra de Lie de um dado grupo na teoria clássica de Lie. Recorrendo ao produto cronológico, aí definido, transformam o espaço linear dos campos vectoriais não autónomos absolutamente contínuos numa álgebra cronológica e definem o logaritmo não cronológico do fluxo gerado por campos não autónomos obtendo uma sua expansão em série. Esta expansão é fundamental na obtenção dos resultados a apresentar nos capítulos seguintes deste trabalho.

De uma forma breve, pode-se descrever o cálculo cronológico como um cálculo formal de operadores centrado na noção de exponencial cronológica. Esta é uma extensão ao caso não autónomo da exponencial de um campo vectorial autónomo definido por uma equação diferencial autónoma.

Diversos trabalhos têm sido publicados debruçando-se sobre diferentes aspectos e aplicações do cálculo cronológico. O campo mais fértil é, sem dúvida, a teoria de controlo de sistemas não lineares [AGS89, AGS89]. Sarychev usa as ferramentas do cálculo cronológico para o estudo da estabilidade de sistemas em [Sar01a].

Embora o cálculo cronológico tenha sido desenvolvido no âmbito das equações diferenciais ordinárias, em [AV83] ocorre a primeira incursão na teoria das equações diferenciais às derivadas parciais. Posteriormente Tretyak em [Tre98] retoma este assunto e considera ainda a teoria de sistemas discretos no tempo. Recentemente foi publicada uma série de trabalhos onde as técnicas do cálculo cronológico são aplicadas ao estudo da controlabilidade de equações às derivadas parciais, [AS05, AS06, Shi06]. Também no presente trabalho se abordará esta questão.

Este capítulo inicia-se com a apresentação dos objectos com os quais o cálculo cronológico opera. Como referência considera-se [AG79, AG81, AGS89, GAV91] e [Sar01a]. Em [AS04] encontra-se uma exposição introdutória ao Cálculo Cronológico.

2.1 Representação de V em $C^\infty(V)$

A álgebra $C^\infty(V)$, introduzida na Secção 1.2, desempenha um papel fundamental no presente capítulo. De facto, o cálculo cronológico baseia-se na representação exponencial de fluxos pelo que reflecte, sobre tudo, as suas propriedades de grupo. Assim, nesta teoria a variedade diferenciável V é “substituída” pela álgebra de funções diferenciáveis associada $C^\infty(V)$ que, embora de dimensão infinita, é linear. Com este objectivo, nesta secção está-se interessado em identificar pontos, vectores tangentes, difeomorfismos e campos vectoriais com funcionais e operadores na álgebra $C^\infty(V)$. Mais precisamente, identificam-se pontos $p \in V$ com homomorfismos $\hat{p} : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$, vectores tangentes $v \in T_p V$ com funcionais lineares $\xi : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$, difeomorfismos $P \in \text{Dif } V$ com automorfismos $\hat{P} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ e campos vectoriais $Q \in \text{Vec } V$ com derivações $\hat{Q} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$.

Todo o ponto $p \in V$ define, pela correspondência entre $\varphi \in C^\infty(V)$ e o seu valor em $p \in V$, um funcional linear

$$\begin{aligned}\hat{p} : C^\infty(V) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \hat{p}(\varphi) = \varphi(p).\end{aligned}$$

O funcional \hat{p} é um homomorfismo das álgebras $C^\infty(V)$ e \mathbb{R} pois

$$\hat{p}(\varphi + \psi) = \hat{p}\varphi + \hat{p}\psi \quad (2.1)$$

$$\hat{p}(\varphi \cdot \psi) = (\hat{p}\varphi) \cdot (\hat{p}\psi) \quad (2.2)$$

$$\hat{p}(\alpha \cdot \varphi) = \alpha \cdot \hat{p}\varphi \quad (2.3)$$

para $\varphi, \psi \in C^\infty(V)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. O recíproco é ainda verdade, para todo o homomorfismo não trivial de álgebras, $\varphi : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$, existe um ponto $p \in V$ tal que $\varphi = \hat{p}$, [AS04]. Daqui, a variedade V pode ser reconstruída sendo os seus elementos obtidos dos de $C^\infty(V)$ e a sua topologia obtida da topologia fraca do espaço dos funcionais em $C^\infty(V)$. Além disso, a estrutura diferenciável de V pode também ser recuperada de $C^\infty(V)$.

Todo o difeomorfismo $P : V \rightarrow V$ pode ser identificado com um automorfismo da álgebra $C^\infty(V)$

$$\hat{P} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V), \quad \varphi \mapsto \hat{P}(\varphi) = \varphi(P)$$

isto é, para todo o $p \in V$, $\varphi \in C^\infty(V)$, $(\hat{P}\varphi)(p) = \varphi(P(p))$. Reciprocamente, para todo o automorfismo $A : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$ existe um difeomorfismo $\hat{P} \in \text{Dif } V$ tal que $A = \hat{P}$, [AS04].

Caracterizem-se os vectores tangentes a V em p . Cada vector tangente $v \in T_p V$ está relacionado com um funcional linear \hat{v} através da derivada direccionada segundo v

$$\hat{v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(p(t)), \quad p(0) = p, \quad \dot{p}(0) = v$$

e esta derivada satisfaz a regra de Leibniz. A curva de funcionais $\hat{p}(\cdot)$ em $C^\infty(V)$ que corresponde à curva diferenciável $p(\cdot)$ de pontos de V satisfaz a regra multiplicativa (2.2): $\hat{p}(t)(\varphi \cdot \psi) = \hat{p}(t)(\varphi) \cdot \hat{p}(t)(\psi)$. Diferenciando esta igualdade em $t = 0$ conclui-se que o vector velocidade da curva de funcionais

$$\hat{v} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \hat{p}(t), \quad \hat{v} : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaz a regra de Leibniz

$$\hat{v}(\varphi\psi) = \hat{v}(\varphi)\psi(p(0)) + \varphi(p(0))\hat{v}(\psi).$$

Assim, vectores tangentes $v \in T_p V$ são identificados com derivadas direccionais $\hat{v} : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, funcionais lineares que satisfazem a regra de Leibniz num ponto.

Caracterizem-se os campos vectoriais em V . Como foi visto na Secção 1.1.5, um campo vectorial diferenciável em V é uma família de vectores tangentes $v_p \in T_p V$, $p \in V$, tal que para cada $\varphi \in C^\infty(V)$ a aplicação $p \mapsto v_p \varphi$, $p \in V$ é uma função diferenciável em V . A cada campo vectorial diferenciável $X \in \text{Vec } V$ corresponde um operador linear

$$\hat{X} : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V), \quad \varphi \mapsto \hat{X}(\varphi)$$

satisfazendo a regra de Leibniz

$$\hat{X}(\varphi\psi) = (\hat{X}\varphi)\psi + \varphi\hat{X}(\psi), \quad \varphi, \psi \in C^\infty(V).$$

e que é a derivada de Lie segundo o campo vectorial X .

A derivada de Lie, \hat{X} , é uma derivação da álgebra $C^\infty(V)$ e toda a derivação da álgebra $C^\infty(V)$ é a derivada direccional segundo algum campo vectorial diferenciável em V .

Um ponto $P(p)$ da variedade V pode ser escrito na notação de operadores como $\hat{p} \circ \hat{P}$. É usual omitir o acento circunflexo e escrever $p \circ P$. Esta notação não gera ambiguidade pois caso p esteja à direita de P então p é um ponto, P é um difeomorfismo e $P(p)$ é o valor do difeomorfismo P no ponto p . Se, por outro lado, p estiver à esquerda de P então p é um homomorfismo, P um automorfismo e $p \circ P$ é um homomorfismo de $C^\infty(V)$. De modo análogo, $X(p) \in T_p V$ é o valor do campo vectorial X no ponto p e $p \circ X : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$ é a derivada direccional segundo o vector $X(p)$. Uma vez que

$$(\hat{p} \circ \hat{P}_2 \circ \hat{P}_1)(\varphi) = (\widehat{P_2(p)} \circ \hat{P}_1)(\varphi) = P_1(\widehat{P_2(p)})(\varphi) = \varphi(P_1(P_2(p))),$$

a identificação de $P \in \text{Dif } V$ com o automorfismo \hat{P} de $C^\infty(V)$ é contravariante: ao difeomorfismo $P_1 \circ P_2$ corresponde o automorfismo $\hat{P}_2 \circ \hat{P}_1$.

Em resumo, sendo $p \in V$; $P, Q \in \text{Dif } V$; $X, Y \in \text{Vec } V$; $v \in T_p V$ tal que $v = \frac{d}{dt}|_{t=0} q(t)$ onde $q(\cdot)$ é uma curva em V com início em p , para $\varphi \in C^\infty(V)$ as seguintes expressões estão bem definidas

$$\begin{aligned} \hat{p}\varphi &= \varphi(p), \\ (\hat{p} \circ \hat{P})\varphi &= \widehat{P(p)}\varphi = \varphi(P(p)), \\ (\hat{p} \circ \hat{P} \circ \hat{Q})\varphi &= \varphi(Q(P(p))), \\ (\hat{p} \circ \hat{X})\varphi &= X(\varphi(p)), \\ (\hat{p} \circ \hat{P} \circ \hat{X})\varphi &= (\widehat{P(p)} \circ \hat{X})\varphi = X(\varphi(P(p))) \end{aligned}$$

bem como as expressões

$$\begin{aligned} (\hat{v} \circ \hat{P})\varphi &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} q(t) \right) \circ \hat{P}\varphi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(P(q(t))) = P_* v \varphi \\ (\hat{p} \circ \hat{X} \circ \hat{P})\varphi &= (\widehat{X(p)} \circ \hat{P})\varphi = P_* X(p)\varphi = (\hat{p} \circ \hat{P} \circ P_* X)\varphi, \quad X(p) = v. \end{aligned}$$

Da última expressão, segue que a acção do difeomorfismo $P \in \text{Dif } V$ sobre o campo vectorial $X \in \text{Vec } V$ é um homomorfismo linear que actua como uma transformação de semelhança definida por

$$P \circ P_* X = X \circ P \Leftrightarrow P_* X = P^{-1} \circ X \circ P.$$

Em particular, os difeomorfismos preservam a composição

$$P_*(X \circ Y) = P^{-1} \circ (X \circ Y) \circ P = (P^{-1} \circ X \circ P) \circ (P^{-1} \circ Y \circ P) = P_* X \circ P_* Y$$

para $X, Y \in \text{Vec } V$. Daqui é imediato que os difeomorfismos preservam o parêntesis de Lie de campos vectoriais. Recorrendo à notação usual¹ Ad para a transformação de semelhança associada ao automorfismo $A : C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(V)$

$$(\text{Ad } A)X = A \circ X \circ A^{-1}, \quad X \in \text{Vec } V$$

tem-se $P_* = \text{Ad } P^{-1}$, $P \in \text{Dif } V$.

Observação 2.1. *O parêntesis de Lie confere ao conjunto dos campos vectoriais a estrutura de álgebra de Lie de dimensão infinita. Esta álgebra denota-se por $\text{Der } V$ e é a álgebra de Lie do grupo $\text{Dif } V$, [AS04].*

2.2 Famílias de funcionais e operadores

O cálculo cronológico trabalha com famílias de pontos, difeomorfismos e campos vectoriais que gozam de algumas propriedades de regularidade relativamente a um parâmetro. Dada a identificação de pontos e vectores tangentes com funcionais e difeomorfismos e campos vectoriais com operadores em $C^\infty(V)$, introduzam-se algumas propriedades de regularidade no sentido fraco à custa das propriedades respectivas de famílias de funções uni-paramétricas

$$t \mapsto \varphi_t, \quad \varphi_t \in C^\infty(V), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Comece-se por introduzir as propriedades de regularidade para funções. Como foi visto na Secção 1.2, $C^\infty(V)$ é um espaço topológico. Assim, em $C^\infty(V)$ a continuidade e a diferenciabilidade de uma família $\{\varphi_t\}$ com respeito ao parâmetro t definem-se da forma usual.

As noções de família de funções de $C^\infty(V)$ mensurável, localmente integrável ou absolutamente contínua com respeito a um parâmetro t , são análogas às introduzidas na Secção 1.2 para famílias uni-paramétricas de funções em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

A família de funções $\{\varphi_t\} \in C^\infty(V)$ é *Lipschitziana* com respeito a t se

$$\|\varphi_t - \varphi_\tau\|_{s,K} \leq C_{s,K} |t - \tau|$$

para todo o $s \geq 0$ sendo K um subconjunto compacto de V e $t, \tau \in \mathbb{R}$; diz-se ainda, que tal família é *localmente limitada* (com respeito a t) se

$$\|\varphi_t\|_{s,K} \leq C_{s,K,I}$$

¹Representação adjunta

para todo o $s \geq 0$ sendo K e I subconjuntos compactos de V e \mathbb{R} , respectivamente, e $t \in I$. As constantes $C_{s,K}$ e $C_{s,K,I}$ dependem de s , K e I . Além disso, sendo $P \in \text{Dif } V$ e $\varphi \in C^\infty(V)$ tem-se

$$\|P\varphi\|_{s,K} \leq C_{s,P} \|\varphi\|_{s,P(K)}, \quad s \geq 0$$

e K um subconjunto compacto de V^1 . Campos vectoriais e difeomorfismos são, deste modo, operadores lineares contínuos no espaço topológico $C^\infty(V)$.

Definam-se de seguida, as propriedades de regularidade para os funcionais e operadores em $C^\infty(V)$. Uma família de funcionais ou operadores lineares em $C^\infty(V)$

$$t \mapsto A_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

goza da propriedade de regularidade \mathcal{P} se a família

$$t \mapsto A_t \varphi, \quad t \in \mathbb{R}$$

goza da mesma propriedade \mathcal{P} para todo $\varphi \in C^\infty(V)$. A propriedade \mathcal{P} pode ser uma das referidas na Secção 1.2 para as famílias de funções.

Campos vectoriais e difeomorfismos que gozem de algumas das propriedades de regularidade anteriores merecem especial destaque e serão usados de forma recorrente nos capítulos seguintes.

Definição 2.1 (Campo vectorial não autónomo). *Um campo vectorial não autónomo, ou simplesmente campo vectorial, em V é uma família mensurável localmente limitada, com respeito a t , de campos vectoriais*

$$t \mapsto X_t, \quad X_t \in \text{Vec } V, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Refira-se que a noção de campo vectorial não autónomo considerada em [AG79] está associada a uma família localmente integrável de campos vectoriais. É óbvio que se uma família é localmente limitada também será localmente integrável pelo que a definição de campo vectorial aqui considerada é mais vasta que a apresentada no trabalho referido.

Definição 2.2 (Fluxo). *Uma família absolutamente contínua de difeomorfismos*

$$t \mapsto P_t, \quad P_t \in \text{Dif } V, \quad t \in \mathbb{R}$$

diz-se um fluxo não autónomo em V .

Assim, para um campo vectorial não autónomo X_t , a família de funções $t \mapsto \hat{X}_t \varphi$ é localmente integrável para qualquer $\varphi \in C^\infty(V)$. De modo análogo, para um fluxo P_t , a família de funções $(\hat{P}_t \varphi)(p) = \varphi(P_t(p))$ é absolutamente contínua com respeito a t para todo $\varphi \in C^\infty(V)$.

A integração de famílias mensuráveis localmente integráveis e a diferenciação de famílias diferenciáveis são também definidas no sentido fraco, isto é

$$\int_{t_0}^{t_1} A_t dt : \varphi \mapsto \int_{t_0}^{t_1} A_t \varphi dt \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt} A_t : \varphi \mapsto \frac{d}{dt} (A_t \varphi)$$

¹Para mais detalhes ver [AG79].

com $\varphi \in C^\infty(V)$.

Sendo A_t e B_t duas famílias contínuas de operadores em $C^\infty(V)$ diferenciáveis em t_0 , então a família $A_t \circ B_t$ é contínua, diferenciável em t_0 e satisfaz a regra de Leibniz

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (A_t \circ B_t) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} A_t \right) \circ B_t + A_t \circ \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} B_t \right).$$

Se as famílias de operadores A_t e B_t são absolutamente contínuas então também a sua composição $A_t \circ B_t$ o é. O mesmo se verifica com a composição de funcionais e operadores. Para uma família absolutamente contínua de funções φ_t , a família $A_t \varphi_t$ é também absolutamente contínua e verifica a regra de Leibniz.

Pode-se agora introduzir o operador **ad** associado ao operador **Ad** introduzido na secção anterior. Se P_t for um fluxo em V tal que

$$P_0 = \text{Id} \quad \text{e} \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P_t = X \in \text{Vec } V$$

então, para $Y \in \text{Vec } V$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Ad } P_t) Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (P_t \circ Y \circ P_t^{-1}) = X \circ Y - Y \circ X = [X, Y].$$

Denotando

$$\text{ad } X = \text{ad} \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} P_t \right) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad } P_t$$

tem-se

$$\text{ad } XY = [X, Y]. \quad (2.4)$$

O operador **ad** é, de facto, uma derivação na álgebra $\text{Vec } V$, cf. Secção 1.1.5.

2.3 Exponencial cronológica

Todo o campo vectorial não autónomo X_t define em V um problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt} p(t) = X_t(p(t)), \quad p(0) = p_0. \quad (2.5)$$

A solução do problema de Cauchy (2.5) na variedade V é determinada por redução a um problema de Cauchy num espaço Euclidiano.

A solução de (2.5) em V é uma família $p(t, p_0)$ de aplicações Lipschitzinas em t e diferenciável em ordem a p_0 , satisfaz a condição inicial e satisfaz a equação diferencial para quase todo o $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.3. *O campo vectorial $X \in \text{Vec } V$ diz-se completo se para todo o $p_0 \in V$ a solução $p(t, p_0)$ do problema de Cauchy*

$$\frac{dp}{dt} = X(p), \quad p(0, p_0) = p_0 \quad (2.6)$$

está definida para todo o $t \in \mathbb{R}$.

No que se segue, supõe-se que a solução $p(t, p_0)$ está definida para todo o $p_0 \in V$ e todo o $t \in \mathbb{R}$, ou seja, supõe-se que o campo vectorial não autónomo X_t é completo.

2.3.1 Definição e representação em série

O problema de Cauchy (2.5) pode ser escrito recorrendo uma equação linear para famílias de funcionais¹ contínuas Lipschitzianas em $C^\infty(V)$

$$\frac{d}{dt}p(t) = p(t) \circ X_t, \quad p(0) = p_0. \quad (2.7)$$

Este problema é satisfeito pela família de funcionais

$$p(t, p_0) : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad p_0 \in V, \quad t \in \mathbb{R}$$

e o fluxo associado a esta família

$$P_t : p_0 \mapsto p(t, p_0)$$

é solução do problema de Cauchy para operadores em $C^\infty(V)$

$$\frac{d}{dt}P_t = P_t \circ X_t, \quad P_0 = \text{Id}. \quad (2.8)$$

Definição 2.4 (Exponencial cronológica). *A solução da equação diferencial de operadores (2.8) designa-se por exponencial cronológica à direita e denota-se por*

$$P_t \equiv \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau. \quad (2.9)$$

Nesta notação, a seta indica a posição, na equação (2.8), do campo vectorial X_t relativamente à composição. Saliente-se que, no caso da condição inicial do problema de Cauchy ser dada em $t_0 \neq 0$, no limite inferior do integral que define a exponencial cronológica deverá figurar t_0 e escrever-se-á

$$P_{t_0, t} \equiv \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^t X_\tau d\tau.$$

A solução P da equação (2.8) admite a representação formal em série

$$P_t = \text{Id} + \int_0^t X_\tau d\tau + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} X_{\tau_n} \circ \cdots \circ X_{\tau_1} d\tau_n \cdots d\tau_1. \quad (2.10)$$

Tomando a forma integral da equação (2.8)

$$P_t = \text{Id} + \int_0^t P_{\tau_1} \circ X_{\tau_1} d\tau_1 \quad (2.11)$$

e substituindo P_{τ_1} no lado direito, de acordo com (2.11), vem

$$\begin{aligned} P_t &= \text{Id} + \int_0^t \left(\text{Id} + \int_0^{\tau_1} P_{\tau_2} \circ X_{\tau_2} d\tau_2 \right) \circ X_{\tau_1} d\tau_1 \\ &= \text{Id} + \int_0^t X_\tau d\tau + \int_0^t \int_0^{\tau_1} P_{\tau_2} \circ X_{\tau_2} \circ X_{\tau_1} d\tau_2 d\tau_1. \end{aligned}$$

Iterando este processo indefinidamente obtém-se a série (2.10).

¹Omite-se aqui o acento circunflexo

Observação 2.2. A exponencial cronológica é um caso particular das séries cronológicas formais, [AG81]. Uma série da forma

$$P_t(X_\tau) = g_0(X_t) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{m-1}} g_m(X_t, X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) dt_m \dots dt_1,$$

onde g_k são polinómios em variáveis não comutativas e X_t é um campo vectorial, diz-se série cronológica formal. De facto, a série (2.10) é ainda uma série de Volterra pois sendo uma série integral, os polinómios envolvidos são produtos das variáveis. No conjunto das séries cronológicas é possível definir um produto transformando, assim, este conjunto numa álgebra real associativa, [AG79]. Denota-se esta álgebra por \mathfrak{C} .

2.3.2 Exponencial cronológica à esquerda

A necessidade da designação *exponencial cronológica à direita* justifica-se com a possibilidade de definir a *exponencial cronológica à esquerda*.

Definindo $Q_t = (P_t)^{-1}$ e diferenciando a identidade $P_t \circ Q_t = \text{Id}$ obtém-se

$$\frac{d}{dt} P_t \circ Q_t + P_t \circ \frac{d}{dt} Q_t = 0.$$

Atendendo à equação (2.8), esta igualdade pode ser escrita como

$$P_t \circ X_t \circ Q_t + P_t \circ \frac{d}{dt} Q_t = 0$$

ou ainda na forma

$$X_t \circ Q_t + \frac{d}{dt} Q_t = 0.$$

se multiplicada à esquerda por Q_t . Assim, Q_t satisfaz o problema de Cauchy para operadores em $C^\infty(V)$

$$\frac{d}{dt} Q_t = -X_t \circ Q_t, \quad Q_0 = \text{Id}. \quad (2.12)$$

Definição 2.5 (Exponencial cronológica à esquerda). A solução do problema de Cauchy (2.12) designa-se exponencial cronológica à esquerda e denota-se

$$Q_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t -X_\tau d\tau. \quad (2.13)$$

Considerando em $V = \mathbb{R}^n$ o problema

$$\frac{d}{dt} x(t) = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$ e $t \mapsto A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma aplicação localmente integrável, o fluxo P_t a ele associado satisfaz o problema de Cauchy para operadores lineares (matrizes)

$$\frac{d}{dt} P_t = A(t)P_t, \quad P_0 = \text{Id}.$$

Escrevendo a forma integral desta equação e procedendo a substituições recursivas, tal como para obter (2.10), conclui-se que a representação do fluxo P_t é

$$P_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t A(\tau) d\tau.$$

Ou seja, o fluxo de um operador linear é representado por uma exponencial cronológica à esquerda contrariamente ao indicado em [CS05b] onde se escreve o fluxo de um sistema linear recorrendo à exponencial cronológica à direita.

2.3.3 Unicidade de solução do problema de Cauchy

A existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy é um problema da maior relevância no que diz respeito às equações diferenciais. No caso das equações diferenciais não autónomas a solução escreve-se à custa da exponencial cronológica.

Teorema 2.1 ([AS04]). *Seja X_t um campo vectorial completo em V . O problema de Cauchy (2.7) admite como solução a família*

$$p(t) = p_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau, \quad t > 0. \quad (2.14)$$

na classe das famílias dos funcionais Lipschitzianos em $C^\infty(V)$. Esta solução é única.

Designando $P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$ e calculando

$$\frac{d}{dt} (p(t) \circ P_t^{-1}) = \frac{d}{dt} (p(t) \circ Q_t) = p(t) \circ X_t \circ Q_t - p(t) \circ X_t \circ Q_t = 0,$$

conclui-se que

$$p(t) \circ Q_t = \text{constante}.$$

Ora $Q_0 = \text{Id}$, logo $p(t) \circ Q_t = p_0$. Operando à direita com P_t obtém-se a unicidade.

Obviamente $p(\cdot)$ é uma curva (de pontos) em V . Dada a identificação feita na Secção 2.1, cada ponto de V define um funcional linear em $C^\infty(V)$. Nesse sentido, a curva $p(\cdot)$ representa uma família de funcionais em $C^\infty(V)$.

2.3.4 Expansão assintótica

Uma questão que obviamente se coloca é a da convergência da série (2.10). Uma vez que existe sempre uma aplicação suave em V para a qual a série diverge caso $X_t \neq 0$, esta nunca converge em $C^\infty(V)$ no sentido fraco. No entanto, denotando a m -ésima soma parcial da série (2.10) por

$$S_m(t) = \text{Id} + \sum_{n=1}^{m-1} \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} X_{\tau_n} \circ \cdots \circ X_{\tau_1} d\tau_n \cdots d\tau_1,$$

para toda a aplicação $\varphi \in C^\infty(V)$, $s \geq 0$ e K um subconjunto compacto de V , tem-se a seguinte estimativa

$$\left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau - S_m(t) \right) \varphi \right\|_{s,K} = O(t^m), \quad t \rightarrow 0.$$

A demonstração deste resultado é feita recorrendo a estimativas sobre as semi-normas envolvidas e o lema de Gronwall. A sua demonstração pode ser encontrada em [AG79] para campos vectoriais arbitrários. Considerando o campo εX_t , $\varepsilon > 0$ pequeno, é válida a estimativa

$$\left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon X_\tau d\tau - S_m^\varepsilon(t) \right) \varphi \right\|_{s,K} = O(\varepsilon^m), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

onde $S_m^\varepsilon(t)$ denota a m -ésima soma parcial da série (2.10) para o novo campo vectorial εX_t . Desta forma, é válida a *expansão assymptótica*

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \sim \text{Id} + \int_0^t X_\tau d\tau + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} X_{\tau_n} \circ \cdots \circ X_{\tau_1} d\tau_n \cdots d\tau_1. \quad (2.15)$$

Em [AS04] os autores mostram o seguinte resultado relativamente à convergência da série anterior.

Lema 2.2. *A expansão assymptótica (2.15) converge para a exponencial cronológica em todo o subespaço normado S de $C^\infty(V)$ onde o campo X_t esteja bem definido e seja limitado*

$$X_t S \subset S, \quad \|X_t\| = \sup\{\|X_t \varphi\| : \varphi \in S, \|\varphi\| \leq 1\} < \infty.$$

Note-se que, o lema anterior, garante a convergência da expansão assymptótica (2.15) no caso de campos vectoriais lineares reais, isto é, considerando \mathbb{R}^n com o sub-espaço dos campos vectoriais lineares. Caso a variedade e o campo vectorial sejam analíticos, a convergência está também garantida para t suficientemente pequeno, [AG79].

Tal como a exponencial cronológica à direita, também a exponencial cronológica à esquerda admite expansão assymptótica

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t -X_\tau d\tau \sim \text{Id} + \int_0^t -X_\tau d\tau + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} (-X_{\tau_1}) \circ \cdots \circ (-X_{\tau_n}) d\tau_n \cdots d\tau_1.$$

Esta expansão assymptótica obtém-se de forma análoga à expansão (2.15) e todas as considerações anteriormente feitas sobre a convergência permanecem válidas.

2.4 Logaritmo cronológico

Em (2.9) definiu-se

$$P_t \equiv \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$$

como solução do problema

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t \circ X_t, \quad P_0 = \text{Id}$$

e pelo Teorema 2.1 estabeleceu-se a sua unicidade. Assim, $X_t, t \in \mathbb{R}$ é definido univocamente pela exponencial cronológica e de (2.8) obtém-se

$$X_t = P_t^{-1} \circ \frac{d}{dt} P_t$$

isto é

$$X_t = \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right)^{-1} \circ \frac{d}{dt} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right).$$

Em [AG79], a correspondência

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \mapsto X_t$$

é designada por *logaritmo cronológico à direita* e é denotada por $\overrightarrow{\log}$. De modo análogo, é definido o *logaritmo cronológico à esquerda* associado à relação

$$X_t = \frac{d}{dt} \left(\overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right) \circ \left(\overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right)^{-1}$$

e denotado $\overleftarrow{\log}$.

O logaritmo cronológico é, de facto, uma correspondência entre aplicações

$$\overrightarrow{\log} \left\{ \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau : t \in \mathbb{R} \right\} = \{X_t : t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$\overleftarrow{\log} \left\{ \overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau : t \in \mathbb{R} \right\} = \{X_t : t \in \mathbb{R}\},$$

respectivamente, para o logaritmo cronológico à direita e à esquerda. O logaritmo cronológico existe para todo o fluxo P_t , [Roc03].

Na Secção 2.3.1 foi referido que, no caso de a condição inicial do problema de Cauchy (2.8) ser dada em $t_0 \neq 0$, se escreve

$$P_{t_0,t} \equiv \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^t X_\tau d\tau.$$

Neste caso escrever-se-á $X_t = \overrightarrow{\log}_{t_0} P_{t_0,t}$ funcionando t_0 como um parâmetro.

2.5 Propriedades da exponencial cronológica

Diversas propriedades da exponencial cronológica obtêm-se com facilidade por simples manipulação algébrica. Seja P_t o fluxo gerado pelo campo vectorial completo $X_t \in \text{Vec } V$, isto é

$$P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau,$$

e $Q_t = P_t^{-1}$. Combinado as igualdades (2.9) e (2.13) verifica-se que

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \right)^{-1} = \overleftarrow{\exp} \int_0^t -X_\tau d\tau.$$

Uma outra relação entre a exponencial à direita e a exponencial à esquerda obtém-se operando à direita com o operador $\text{Id} = P_t^{-1} \circ P_t$ na equação do problema (2.8)

$$\frac{d}{dt} P_t = P_t \circ X_t = (P_t \circ X_t \circ P_t^{-1}) \circ P_t = (\text{Ad } P_t) X_t \circ P_t.$$

Pela unicidade de solução do problema de Cauchy com $\text{Ad } P_t X_t|_{t=0} = \text{Id}$

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } P_\tau X_\tau d\tau.$$

Lema 2.3. *A família $\text{Ad } P_t$ satisfaz o problema de Cauchy para operadores $A_t : \text{Vec } V \rightarrow \text{Vec } V$*

$$\frac{d}{dt} A_t = A_t \circ \text{ad } X_t, \quad A_0 = \text{Id}. \quad (2.16)$$

Com efeito, para todo o campo $Y \in \text{Vec } V$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{Ad } P_t) Y &= \frac{d}{dt} (P_t \circ Y \circ P_t^{-1}) = \frac{d}{dt} P_t \circ Y \circ P_t^{-1} + P_t \circ Y \circ \frac{d}{dt} P_t^{-1} \\ &= P_t \circ X_t \circ Y \circ P_t^{-1} - P_t \circ Y \circ X_t \circ P_t^{-1} \\ &= P_t \circ (X_t \circ Y - Y \circ X_t) \circ P_t^{-1} = \text{Ad } P_t [X_t, Y] \\ &= (\text{Ad } P_t) \text{ad } X_t Y, \end{aligned}$$

ou seja, $\text{Ad } P_t$ é solução do problema

$$\frac{d}{dt} \text{Ad } P_t = (\text{Ad } P_t) \circ \text{ad } X_t, \quad \text{Ad } P_0 = \text{Id}.$$

Por analogia com o problema (2.8), obtém-se a expansão assintótica

$$\text{Ad } P_t \sim \text{Id} + \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau + \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} \text{ad } X_{\tau_n} \circ \cdots \circ \text{ad } X_{\tau_1} d\tau_n \cdots d\tau_1$$

e, pela unicidade de solução

$$\text{Ad } P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau. \quad (2.17)$$

Corolário 2.4. *Seja P_t o fluxo gerado pelo campo vectorial completo $X_t \in \text{Vec } V$. Então o operador $\text{Ad } P_t$ é invertível e*

$$(\text{Ad } P_t)^{-1} = \text{Ad } P_t^{-1}.$$

Lema 2.5. *Seja P_t o fluxo gerado pelo campo vectorial completo $X_t \in \text{Vec } V$, então para todo o difeomorfismo $P \in \text{Dif } V$*

$$\text{Ad } P P_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } P X_\tau d\tau.$$

Sendo $P \in \text{Dif } V$, a equação diferencial do problema (2.8) pode ser escrita como

$$P \circ \left(\frac{d}{dt} P_t \right) \circ P^{-1} = \frac{d}{dt} (P \circ P_t \circ P^{-1}) = (P \circ P_t \circ P^{-1}) \circ (P \circ X_t \circ P^{-1}).$$

Denotando $Z_t = P \circ P_t \circ P^{-1}$ tem-se $Z_0 = \text{Id}$ e a equação anterior é

$$\frac{d}{dt} Z_t = Z_t \circ \text{Ad } P X_t.$$

Assim, o fluxo associado a este problema de Cauchy é

$$Z_t = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } P X_\tau d\tau$$

e pela unicidade de solução fica provado o lema.

Lema 2.6. *Seja P_t o fluxo gerado pelo campo vectorial completo $X_t \in \text{Vec } V$. O campo vectorial $Y \in \text{Vec } V$ é invariante sob acção de P_t se e só se X_t e Y comutam:*

$$(P_t)_* Y = Y \Leftrightarrow [X_t, Y] = 0.$$

Como foi visto no final da Secção 2.1, $(P_t^{-1})_* = \text{Ad } P_t$. Ora, pelo Lema 2.3

$$\frac{d}{dt} \text{Ad } P_t Y = (\text{Ad } P_t \circ \text{ad } X_t) Y = \text{Ad } P_t \circ (\text{ad } X_t Y) = \text{Ad } P_t [X_t, Y]$$

por outro lado $\text{Ad } P_t|_{t=0} Y = Y$. O lema segue da unicidade de solução.

Outras propriedades da exponencial cronológica obtêm-se como consequência das propriedades de fluxo. Por exemplo, para $T > 0$ e $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < T$, tem-se

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^{t_1} X_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_1}^{t_2} X_\tau d\tau \circ \dots \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_k}^T X_\tau d\tau \quad (2.18)$$

isto é

$$P_t = P_{0,t_1} \circ P_{t_1,t_2} \circ \dots \circ P_{t_k,T}.$$

Uma vez que $\text{Id} = P_{\tau,\tau} = P_{\tau,t} \circ P_{t,\tau}$ tem-se $P_{t,\tau} = P_{\tau,t}^{-1}$.

2.5.1 Campos autónomos

No caso particular do campo vectorial completo $X_t \in \text{Vec } V$ ser autónomo, isto é,

$$X_t \equiv X$$

o fluxo gerado por este campo é usualmente denotado por e^{tX} em vez de $\overrightarrow{\exp} \int_0^t X d\tau$. Tem-se, obviamente,

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X d\tau = e^{tX} = \overleftarrow{\exp} \int_0^t X d\tau \quad (2.19)$$

e em particular

$$e^X = \overrightarrow{\exp} \int_0^1 X d\tau.$$

A exponencial e^{tX} satisfaz o problema de Cauchy (autónomo)

$$\frac{d}{dt} Q_t = Q_t \circ X, \quad Q_0 = \text{Id}. \quad (2.20)$$

e admite expansão em série assintótica

$$e^{tX} \sim \text{Id} + tX + \frac{t^2}{2} X \circ X + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} X^n$$

onde a potência k do campo vectorial deve ser entendida no sentido da composição de campos vectoriais.

Para o campo vectorial autónomo $X \in \text{Vec } V$ a relação (2.17) toma a forma,

$$\text{Ad } e^{tX} = e^{t \text{ad } X} \quad (2.21)$$

e a família de operadores $e^{t \text{ad } X} : \text{Vec } V \rightarrow \text{Vec } V$ é a única solução do problema

$$\frac{d}{dt} A_t = A_t \circ \text{ad } X, \quad A_0 = \text{Id}.$$

Mais uma vez, é válida a expansão assintótica

$$e^{t \text{ad } X} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \text{ad}^n X \quad (2.22)$$

onde $\text{ad}^n X = \text{ad } X(\text{ad}^{n-1} X)$; $n = 1, 2, \dots$ sendo $\text{ad}^0 X = \text{Id}$.

Em geral, os fluxos não comutam, isto é, sendo $X_t, Y_t \in \text{Vec } V$ dois campos vectoriais completos cujos fluxos associados são P_t e Z_t ,

$$P_t \circ Z_\tau \neq Z_\tau \circ P_t.$$

A não comutatividade de fluxos ocorre mesmo quando associada a campos autónomos, no entanto, neste caso vale o seguinte resultado.

Lema 2.7. *Sejam $X, Y \in \text{Vec } V$ dois campos vectoriais completos e P_t e Z_t os respectivos fluxos. Então P_t e Z_t comutam se e só se X e Y comutam.*

Do Lema 2.6 conclui-se que a comutatividade dos fluxos implica a comutatividade dos campos vectoriais associados a esses fluxos. Da igualdade (2.21) e da expansão (2.22), se $\text{ad } XY = [X, Y] = 0$ resulta que

$$\text{Ad } e^{t_1 X} Y = e^{t_1 \text{ad } X} Y = Y.$$

Da aplicação do Lema 2.5, na sua versão para campos autónomos, aos fluxos $e^{t_1 X}$ e $e^{t_2 Y}$; $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ segue

$$(\text{Ad } e^{t_1 X}) e^{t_2 Y} = e^{t_2 (\text{Ad } e^{t_1 X} Y)} = e^{t_2 Y},$$

isto é,

$$e^{t_1 X} \circ e^{t_2 Y} = e^{t_2 Y} \circ e^{t_1 X}.$$

Se o campo vectorial não autónomo X_t ; $t \in [0, T]$ for seccionalmente autónomo, isto é $X_t = X^i$, $t_i < t < t_{i+1}$, definindo $t_0 = 0$ e $T = t_{k+1}$, vem

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = e^{t_1 X^0} \circ e^{(t_2 - t_1) X^1} \circ \dots \circ e^{(T - t_k) X^k}.$$

2.5.2 Campos quase-autónomos

Dado o campo vectorial não autónomo $X_t \in \text{Vec } V$, se para todo o $t \in \mathbb{R}$ e algum $t_0 \in \mathbb{R}$ fixo

$$\left[X_t, \int_{t_0}^t X_\tau d\tau \right] = 0$$

isto é, se X_t comuta com o campo vectorial $\int_{t_0}^t X_\tau d\tau$, o campo diz-se *quase-autónomo*. Estes campos verificam a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [AG79].

Proposição 2.8. *Se $X_t \in \text{Vec } V$ é um campo quase-autônomo então a família de difeomorfismos*

$$Q_t = e^{\int_{t_0}^t X_\tau d\tau}$$

é um fluxo que satisfaz

$$\frac{d}{dt}Q_t = Q_t \circ X_t = X_t \circ Q_t,$$

isto é, neste caso

$$\overrightarrow{\text{exp}} \int_{t_0}^t X_\tau d\tau = e^{\int_{t_0}^t X_\tau d\tau} = \overleftarrow{\text{exp}} \int_{t_0}^t X_\tau d\tau.$$

No caso quase-autônomo, por exemplo, a igualdade (2.17) é

$$\text{Ad } e^{\int_{t_0}^t X_\tau d\tau} = e^{\int_{t_0}^t \text{ad } X_\tau d\tau}. \quad (2.23)$$

2.6 Fórmula da variação das constantes

A fórmula da variação das constantes é uma das mais poderosas ferramentas que o cálculo cronológico oferece. Descreve o fluxo de um campo vectorial não autónomo quando este é “perturbado” por um outro campo vectorial não autónomo. Nesta secção pretende-se descrever a dependência do fluxo do problema (2.7) de uma perturbação no campo X_t , isto é pretende-se conhecer o fluxo gerado pela equação

$$\frac{d}{dt}p(t) = p(t) \circ (X_t + Y_t).$$

Esta questão é da maior relevância no estudo de sistemas reais. A equação anterior pretende traduzir a sensibilidade do problema (soluções) a perturbações do modelo matemático (2.7). É comum tomar como perturbação εY_t , onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Sistemas que sejam pouco sensíveis a pequenas alterações no modelo designa-se por sistemas *robustos* ou sistemas estruturalmente estáveis, [Arn88].

Proposição 2.9 ([AG79]). *Sejam X_t e $X_t + Y_t$ campos vectoriais completos. Então o campo vectorial $\overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t \text{ad } X_\tau d\tau, t \in \mathbb{R}$ é um campo vectorial completo e são válidas as igualdades*

$$\overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau = \overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t \left(\overrightarrow{\text{exp}} \int_0^\tau \text{ad } X_\theta d\theta \right) Y_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t X_\tau d\tau \quad (2.24)$$

$$= \overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t X_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\text{exp}} \int_t^\tau X_\theta d\theta \right) Y_\tau d\tau. \quad (2.25)$$

Esta relação designa-se por fórmula da variação das constantes.

Para a sequência deste trabalho, a versão da fórmula da variação das constantes para a exponencial cronológica à esquerda será mais conveniente. Optou-se, por isso, por apresentar a sua dedução em detrimento da demonstração do Lema 2.9.

Seja

$$P_t = \overleftarrow{\text{exp}} \int_0^t X_\tau d\tau$$

o fluxo gerado pelo campo vectorial não autónomo $X_t \in \text{Vec } V$. Determine-se o fluxo gerado pelo campo $X_t + Y_t$, $Y_t \in \text{Vec } V$, procurando uma solução da forma

$$S_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau = P_t \circ D_t \quad (2.26)$$

para a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S_t = (X_t + Y_t) \circ S_t$$

com condição inicial $S_0 = \text{Id}$. Substituindo S_t na equação anterior vem

$$\frac{d}{dt} (P_t \circ D_t) = (X_t + Y_t) \circ (P_t \circ D_t),$$

isto é,

$$\frac{d}{dt} P_t \circ D_t + P_t \circ \frac{d}{dt} D_t = (X_t \circ P_t \circ D_t) + (Y_t \circ P_t \circ D_t).$$

Como P_t é o fluxo gerado por X_t , $d/dt P_t = X_t \circ P_t$, e a igualdade simplifica-se na forma

$$P_t \circ \frac{d}{dt} D_t = Y_t \circ P_t \circ D_t.$$

Obtém-se, então, uma equação diferencial para D_t

$$\frac{d}{dt} D_t = P_t^{-1} \circ Y_t \circ P_t \circ D_t = \text{Ad } P_t^{-1} Y_t \circ D_t,$$

com $D_0 = \text{Id}$. Ora este é um problema de Cauchy para operadores cuja única solução é

$$D_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \text{Ad } P_\tau^{-1} Y_\tau d\tau.$$

Diferenciando $\text{Ad } P_t^{-1} Z$, $Z \in \text{Vec } V$, verifica-se que

$$\frac{d}{dt} \text{Ad } P_t^{-1} Z = (\text{Ad } P_t^{-1} \circ (-\text{ad } X_t)) Z$$

isto é

$$\text{Ad } P_t^{-1} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t -\text{ad } X_\tau d\tau.$$

Note-se que este facto é o análogo ao Lema 2.3 quando $P_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$. Assim,

$$D_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau -\text{ad } X_\theta d\theta \right) Y_\tau d\tau$$

e a igualdade (2.26) toma a forma

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau = \overleftarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau -\text{ad } X_\theta d\theta \right) Y_\tau d\tau. \quad (2.27)$$

Dois casos particulares da fórmula da variação das constantes merecem especial destaque. Se os campos X, Y são autónomos tem-se

$$e^{t(X+Y)} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{\tau \text{ad } X} Y d\tau \circ e^{tX} = e^{tX} \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t e^{(\tau-t) \text{ad } X} Y d\tau.$$

Caso os campos sejam quase-autónomos a fórmula da variação das constantes vem

$$\begin{aligned} e^{\int_{t_0}^t (X_\tau + Y_\tau) d\tau} &= \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^\tau \text{ad } X_\theta d\theta} Y_\tau d\tau \circ e^{\int_{t_0}^t X_\tau d\tau} \\ &= e^{\int_{t_0}^t X_\tau d\tau} \circ \overrightarrow{\exp} \int_{t_0}^t e^{\int_t^\tau \text{ad } X_\theta d\theta} Y_\tau d\tau. \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.7 Derivada do fluxo em ordem a um parâmetro

A fórmula da variação das constantes introduzida na Secção 2.6 permite incorporar, no fluxo associado ao problema de Cauchy (2.7), perturbações lineares presentes no campo vectorial. Contudo, as perturbações presentes num sistema podem ser não lineares assim como podem depender de um parâmetro real. Considere-se então $F_t(s)$, um campo vectorial não autónomo e dependendo de um parâmetro real s . Pretende-se estudar a dependência do fluxo associado a $F_t(s)$ relativamente ao parâmetro s .

Denotando $\delta_{F_t}(s, \varepsilon) = F_t(s + \varepsilon) - F_t(s)$, conclui-se

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s + \varepsilon) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) + \delta_{F_\tau}(s, \varepsilon) d\tau \\ &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } F_\theta(s) d\theta \right) \delta_{F_\tau}(s, \varepsilon) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau \end{aligned}$$

pela fórmula da variação da constantes. Ou ainda,

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s + \varepsilon) d\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^t G_\tau(s, \varepsilon) \delta_{F_\tau}(s, \varepsilon) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau \quad (2.29)$$

denotando

$$G_\tau(s) = \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } F_\theta(s) d\theta.$$

Tomando a expansão $\delta_{F_\tau}(s, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) + O(\varepsilon^2)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ tem-se

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t G_\tau(s) \delta_{F_\tau}(s, \varepsilon) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t \left(\varepsilon G_\tau(s) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) + O(\varepsilon^2) \right) d\tau \\ &= \text{Id} + \int_0^t \varepsilon G_\tau(s) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pelo que, substituindo a expressão anterior em (2.29), se obtém

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s + \varepsilon) d\tau &= \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau + \\ &+ \left(\varepsilon \int_0^t G_\tau(s) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau \right) \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Desta forma

$$\frac{\partial}{\partial s} \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau = \int_0^t \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } F_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau \quad (2.30)$$

$$= \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau F_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau. \quad (2.31)$$

Recorrendo à fórmula da variação das constantes (2.27), obter-se-ia a seguinte igualdade, análoga à igualdade (2.30), para o fluxo $\overleftarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \overleftarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau &= \overleftarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau \circ \int_0^t \left(\overleftarrow{\exp} \int_0^\tau -\text{ad } F_\theta(s) d\theta \right) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau \\ &= \overleftarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau \circ \int_0^t \text{Ad} \left(\overleftarrow{\exp} \int_0^\tau F_\theta(s) d\theta \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Definindo

$$R_t(s) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau, \quad Z_t(s) = \int_0^t \text{Ad } R_\tau(s) \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau$$

a igualdade (2.31) escreve-se como

$$\frac{\partial}{\partial s} R_t(s) = Z_t(s) \circ R_t(s).$$

Para o campo autónomo $F_t(s) = F(s)$ a igualdade (2.30), por exemplo, toma a forma

$$\frac{\partial}{\partial s} e^{tF(s)} = \int_0^t e^{\tau \text{ad } F(s)} \frac{\partial}{\partial s} F(s) d\tau \circ e^{tF(s)}.$$

E para $F_t(s) = sF_t$ vem

$$\frac{\partial}{\partial s} \overrightarrow{\exp} \int_0^t sF_\tau d\tau = \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau sF_\theta d\theta \right) F_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t sF_\tau d\tau. \quad (2.33)$$

Em [AGS89] o campo

$$Z_t(s) = \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau sF_\theta d\theta \right) F_\tau d\tau \quad (2.34)$$

é designado por *velocidade angular* do fluxo $R_t(s)$. Os autores mostram que

$$\frac{\partial}{\partial s} Z_t(s) = \int_0^t \left[Z_t(s), \frac{\partial}{\partial s} Z_t(s) \right] d\tau \quad (2.35)$$

e provam a unicidade de solução do problema de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial s} Z_t(s) = \int_0^t \left[Z_t(s), \frac{\partial}{\partial s} Z_t(s) \right] d\tau, \quad Z_t(0) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau.$$

2.8 Logaritmo não cronológico

Nesta secção, pretende-se definir o logaritmo não cronológico associado ao fluxo

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau$$

gerado pelo campo vectorial completo $X_t \in \text{Vec } V$. Ou seja, procura-se um campo V_t tal que

$$\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau = e^{V_t}$$

onde o lado direito da igualdade deve ser entendido no sentido de (2.19). De seguida estabelece-se o significado da afirmação anterior.

Considere-se uma família de campos vectoriais $V_t \in \text{Vec } V$ e o fluxo $e^{\tau V_t}; \tau \in \mathbb{R}$. Entenda-se $e^{\tau V_t}$ como um fluxo que depende do parâmetro t . Para $\tau = 1$, por (2.32),

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{V_t} &= \frac{d}{dt} \left(\overleftarrow{\text{exp}} \int_0^1 V_t d\tau \right) = \overleftarrow{\text{exp}} \int_0^1 V_t d\tau \circ \int_0^1 \left(\overrightarrow{\text{exp}} \int_0^\tau -\text{ad } V_t d\theta \right) \frac{d}{dt} V_t d\tau \\ &= e^{V_t} \circ \int_0^1 e^{-\tau \text{ad } V_t} \dot{V}_t d\tau = e^{V_t} \circ \int_0^1 e^{-\tau \text{ad } V_t} d\tau \dot{V}_t. \end{aligned}$$

A família de campos vectoriais $V_t \in \text{Vec } V$ satisfaz, então, a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} e^{V_t} = e^{V_t} \circ \Upsilon(\text{ad } V_t) \dot{V}_t$$

onde

$$\Upsilon(\xi) = \int_0^1 e^{-\tau \xi} d\tau = \frac{1 - e^{-\xi}}{\xi}.$$

Se a família V_t for tal que $V_0 = 0$ e, para todo o $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^1 e^{-\tau \text{ad } V_t} d\tau \frac{d}{dt} V_t = X_t \quad (2.36)$$

então o fluxo e^{V_t} satisfaz o problema de Cauchy

$$\frac{d}{dt} Q_t = Q_t \circ X_t, \quad Q_0 = \text{Id}$$

e, por definição de exponencial cronológica à direita,

$$e^{V_t} = \overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t X_\tau d\tau$$

ou ainda

$$V_t = \ln \overrightarrow{\text{exp}} \int_0^t X_\tau d\tau. \quad (2.37)$$

Em [AG79] os autores introduzem uma expansão em série para o campo V_t com recurso a séries cronológicas. Esta construção é retomada em [AG81]. Em [AGS89] é apresentada uma forma alternativa para a série cronológica quando o campo X_t depende linearmente de um parâmetro. Pretende-se, então, determinar uma expansão em série para o campo V_t

$$V_t = \sum_{m=1}^{\infty} V_t^{(m)}. \quad (2.38)$$

2.8.1 Expansão via integração

Observando que o integral presente em (2.36) é invertível, pois admite representação numa série cujo primeiro termo é o operador identidade, verifica-se que a igualdade (2.36) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}V_t = \varphi(\text{ad } V_t) X_t. \quad (2.39)$$

onde φ é definida por

$$\varphi(z) = \frac{z}{1 - e^{-z}}. \quad (2.40)$$

Observação 2.3. A função φ admite expansão em série de Laurent

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} z^k = 1 + \frac{1}{2}z + \sum_{k=2}^{\infty} b_k z^k, \quad (2.41)$$

onde $b_k = B_k/k!$ e B_k representa o k -ésimo número de Bernoulli:

$$B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \dots \quad B_{2n+1} = 0, \quad n \geq 1.$$

Seguindo [AG79], obtém-se a expansão em série (2.38) por integração da equação (2.39). Considere-se o conjunto $\mathfrak{L}(\lambda)$ das séries de Laurent na variável λ com coeficientes¹ em \mathfrak{C} . As séries em causa são da forma

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} S_t^{(i)} \lambda^i$$

onde, $S_t^{(i)} = S_t^{(i)}(X_\tau) \in \mathfrak{C}$. Dada uma aplicação $F : \mathfrak{L}(\lambda) \rightarrow \mathfrak{L}(\lambda)$, define-se a derivada de F em $L(\lambda) \in \mathfrak{L}(\lambda)$ por

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} F(L(\lambda) + \varepsilon S(\lambda)) \right|_{\varepsilon=0},$$

denotado-a por $\partial_L F(S(\lambda))$. Esta derivada verifica a regra de Leibniz

$$\partial_L(FG)(S(\lambda)) = \partial_L F(S(\lambda))G(L(\lambda)) + F(L(\lambda))\partial_L G(S(\lambda))$$

e tem-se

$$\partial_L \left(\frac{1}{F(S(\lambda))} \right) = -\frac{1}{F(L(\lambda))} S(\lambda) \frac{1}{F(L(\lambda))}.$$

Designa-se por Ψ_t a aplicação que associa a uma série, seja $S_t(X_t)$, a série $\varphi(\text{ad } S_t(X_t))X_t$ e por $\tilde{\Psi}_t$ a aplicação que a uma aplicação F associa $\partial_S F(\Psi_t(S))$. Assim, a equação diferencial (2.39) pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt}V_t = \Psi_t(V_t).$$

¹cf. Observação 2.2, pág. 26

Por analogia com as equações diferenciais ordinárias escreve-se

$$\begin{aligned}
V_t &= \int_0^t \Psi_{\tau_1}(V_{\tau_1}) d\tau_1 = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \frac{d}{d\tau_2} \Psi_{\tau_1}(V_{\tau_2}) d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_0^t \left(\Psi_{\tau_1}(0) + \int_0^{\tau_1} \partial_{V_{\tau_2}} \Psi_{\tau_1} \left(\frac{dV_{\tau_2}}{d\tau_2} \right) d\tau_2 \right) d\tau_1 \\
&= \int_0^t \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \partial_{V_{\tau_2}} \Psi_{\tau_1}(\Psi_{\tau_2}(V_{\tau_2})) d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_0^t \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \vec{\Psi}_{\tau_2}(\Psi_{\tau_1}(V_{\tau_2})) d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_0^t \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \vec{\Psi}_{\tau_2} \left(\Psi_{\tau_1}(0) + \int_0^{\tau_2} \partial_{V_{\tau_3}} \Psi_{\tau_1}(\Psi_{\tau_3}(V_{\tau_3})) d\tau_3 \right) d\tau_2 d\tau_1 \\
&= \int_0^t \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_1 + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \vec{\Psi}_{\tau_2} \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_2 d\tau_1 + \\
&\quad + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \vec{\Psi}_{\tau_2} \left(\int_0^{\tau_2} \vec{\Psi}_{\tau_3}(\Psi_{\tau_1}(V_{\tau_3})) d\tau_3 \right) d\tau_2 d\tau_1
\end{aligned}$$

e iterando o processo vem

$$V_t = \int_0^t \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_1 + \sum_{m=2}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{m-1}} \vec{\Psi}_{\tau_m} \circ \cdots \circ \vec{\Psi}_{\tau_2} \Psi_{\tau_1}(0) d\tau_m \cdots d\tau_2 d\tau_1.$$

Designando $g_1(X_{\tau_1}) = \Psi_{\tau_1}(0)$ e

$$\vec{\Psi}_{\tau_m} \circ \cdots \circ \vec{\Psi}_{\tau_2} \Psi_{\tau_1}(0) = g_m(X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_m}) \quad \text{para } m \geq 2,$$

a série procurada tem a forma

$$V_t = \sum_{m=1}^{\infty} V_t^{(m)} \tag{2.38}$$

onde $V_t^{(1)} = \int_0^t g_1(X_{\tau}) d\tau$ e para $m \geq 2$

$$V_t^{(m)} = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{m-1}} g_m(X_{\tau_1}, \dots, X_{\tau_m}) d\tau_m \cdots d\tau_2 d\tau_1. \tag{2.42}$$

Para indicar o campo ao qual está associada a expansão é usual escrever-se $V_t = V_t(X_t)$ assim como $V_t^{(m)} = V_t^{(m)}(X_t)$. Resta determinar os polinómios g_m . Estes são obtidos recorrendo ao resíduo de séries de Laurent. Note-se que a função de variável complexa $\lambda - z$ é invertível e

$$(\lambda - z)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m-1} z^m,$$

além disso, dada uma qualquer série de potências

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k \lambda^k,$$

o produto $G(\lambda)(\lambda - z)^{-1}$ é uma série de Laurent cujo resíduo, isto é, o coeficiente de λ^{-1} , é

$$\text{res}\{G(\lambda)(\lambda - z)^{-1}\} = \sum_{k=0}^{\infty} G_k z^k = G(z).$$

Define-se, então, os polinómios g_m como o resíduo de alguma série aplicando de forma recursiva a regra de Leibniz e a derivada de $1/F$. Com efeito, da definição de Ψ_m , para uma série Q

$$\Psi_m(Q) = \varphi(\text{ad } Q)X_m = \text{res}\{\varphi(\lambda)(\lambda - \text{ad } Q)^{-1}\}X_m.$$

Assim,

$$g_1(X_1) = \Psi_1(0) = \text{res}\{\varphi(\lambda)\lambda^{-1}\}X_1 = X_1$$

pois, por (2.41), $\text{res}\{\varphi(\lambda)/\lambda\} = 1$. Tem-se também,

$$\Psi_1(\Psi_2(Q)) = \varphi(\text{ad } \Psi_2(Q))X_1 = \text{res}\{\varphi(\lambda)(\lambda - \text{ad } \Psi_2(Q))^{-1}\}X_1$$

pelo que

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}_2(\Psi_1(Q)) &= \partial_Q \Psi_1(\Psi_2(Q)) = \text{res}\{\varphi(\lambda)(\lambda - \text{ad } Q)^{-1} \text{ad } \Psi_2(Q)(\lambda - \text{ad } Q)^{-1}\}X_1 \\ &= \text{res}\{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)(\lambda_1 - \text{ad } Q)^{-1} \text{ad}((\lambda_2 - \text{ad } Q)^{-1}X_2)(\lambda_1 - \text{ad } Q)^{-1}\}X_1. \end{aligned}$$

Desta forma obtém-se

$$\begin{aligned} g_2(X_1, X_2) &= \vec{\Psi}_2(\Psi_1(0)) \text{res}\{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)\lambda_1^{-1} \text{ad}(\lambda_2^{-1}X_2)\lambda_1^{-1}\}X_1 \\ &= \text{res} \frac{\varphi(\lambda_1)\varphi(\lambda_2)}{\lambda_1^2\lambda_2} \text{ad } X_2X_1 = \frac{1}{2} \text{ad } X_2X_1. \end{aligned}$$

A construção dos polinómios g_m , tal como acima descrita, torna-se pouco viável. Em [AG79] é apresentada uma construção algébrica alternativa à anterior que recorre à noção de polinómio comutador.

Construção dos polinómios g_m

Um polinómio diz-se *polinómio comutador* nas variáveis ξ_1, \dots, ξ_m se puder ser expresso como uma combinação linear das variáveis ξ_1, \dots, ξ_m , dos seus comutadores $[\xi_i, \xi_j]$ e de iterações destes.

Considere-se o alfabeto $\mathcal{A} = \{\text{ad}, \xi_1, \dots, \xi_m\}$. Uma qualquer sequência de símbolos do alfabeto designa-se por *palavra* e denota-se por w . Nestas sequências são admitidas repetições do símbolo **ad** mas não dos símbolos ξ_1, \dots, ξ_m . Uma palavra diz-se *regular* se, com a introdução de parêntesis, esta puder ser expressa como um polinómio comutador nas variáveis ξ_1, \dots, ξ_m sendo que o símbolo **ad** representa, como usual, o comutador, cf. (2.4).

Seja w uma palavra e ξ_k um símbolo do alfabeto. Suponha-se $w = w_1 \xi w_2$, onde w_1 é uma palavra, possivelmente vazia, que não contém ξ_k . Suponha-se que $w_1 = v_1 \dots v_l$ onde cada v_i é um símbolo do alfabeto. Define-se *profundidade* de ξ_k em w como o número de palavras regulares da forma $v_i \dots v_l \xi_k$, $1 \leq i < l$.

O alfabeto \mathcal{A} gera uma álgebra associativa livre sobre \mathbb{R} cujos elementos são todas as possíveis combinações lineares das palavras do alfabeto. A cada palavra w associa-se uma derivação d da álgebra que actua sobre os geradores da álgebra de acordo com as regras

$$d(w) \text{ad} = w \text{ad}, \quad d(w)\xi_k = w\xi_k$$

e que se estende aos restantes elementos da álgebra pela linearidade e pela regra de Leibniz.

Exemplo 2.1. As sequências $\xi_3 \text{ ad } e$ e $\text{ad } \xi_1 \xi_2$ são palavras do alfabeto \mathcal{A} . A segunda é uma palavra regular pois

$$\text{ad } \xi_1 \xi_2 = (\text{ad } \xi_1) \xi_2 = [\xi_1, \xi_2] = \xi_1 \xi_2 - \xi_2 \xi_1.$$

Aplicando $d(\text{ad } \xi_2)$ à palavra ξ_1 obtém-se

$$d(\text{ad } \xi_2) \xi_1 = \text{ad } \xi_2 \xi_1$$

e aplicando $d(\text{ad } \xi_3)$ à palavra obtida anteriormente tem-se

$$\begin{aligned} d(\text{ad } \xi_3) \circ d(\text{ad } \xi_2) \xi_1 &= d(\text{ad } \xi_3)(\text{ad } \xi_2 \xi_1) = (d(\text{ad } \xi_3) \text{ad } \xi_2) \xi_1 + \text{ad } \xi_2 (d(\text{ad } \xi_3) \xi_1) \\ &= ((d(\text{ad } \xi_3) \text{ad}) \xi_2 + \text{ad } d(\text{ad } \xi_3) \xi_2) \xi_1 + \text{ad } \xi_2 \text{ad } \xi_3 \xi_1 \\ &= ((\text{ad } \xi_3 \text{ad}) \xi_2 + \text{ad}(\text{ad } \xi_3 \xi_2)) \xi_1 + \text{ad } \xi_2 \text{ad } \xi_3 \xi_1 \\ &= \text{ad } \xi_3 \text{ad } \xi_2 \xi_1 + \text{ad } \text{ad } \xi_3 \xi_2 \xi_1 + \text{ad } \xi_2 \text{ad } \xi_3 \xi_1. \end{aligned}$$

Se $w = \text{ad } \xi_3 \text{ad } \xi_2 \xi_1$, a profundidade de ξ_1, ξ_2 e de ξ_3 em w é, respectivamente, 2, 0 e 0.

Partindo de ξ_1 e recorrendo a d constrói-se o elemento da álgebra

$$d(\text{ad } \xi_m) \circ \cdots \circ d(\text{ad } \xi_2) \xi_1$$

que é a soma de $(2m - 3)!!$ palavras regulares¹.

Para construir os polinómios g_m é necessária ainda a sequência dos números de Bernoulli $B_k; k \geq 0$ introduzida na Observação 2.3. Denotando por v_{ij} a profundidade de ξ_i na palavra w_j , define-se, por fim, $g_1(\xi_1) = \xi_1$ e

$$g_m(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sum_{\alpha=1}^{(2m-3)!!} b_{v_{1\alpha}} \dots b_{v_{m\alpha}} w_\alpha, \quad m \geq 2 \quad (2.43)$$

onde $b_k = B_k/k!$. Assim, os três primeiros polinómios serão

$$g_1(\xi_1) = \xi_1, \quad g_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} \text{ad } \xi_2 \xi_1, \quad g_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{12}([\xi_3, [\xi_2, \xi_1]] + [[\xi_3, \xi_2], \xi_1]).$$

2.8.2 Expansão via produto cronológico

Na situação em que campo X_t depende linearmente de um parâmetro ε , isto é, $X_t(\varepsilon) = \varepsilon X_t$ os polinómios g_m podem ser interpretados no âmbito de uma álgebra cronológica livre. Esta tradução não é por nada simples como é evidente do trabalho de Rocha, [Roc03].

Em [AG81], uma *álgebra cronológica* é definida como um espaço linear, seja A , sobre um corpo \mathbb{K} munido com uma operação bilinear $\star : A \times A \rightarrow A$ que satisfaz a seguinte relação

$$x \star (y \star z) - (x \star y) \star z = y \star (x \star z) - (y \star x) \star z, \quad (2.44)$$

para todo $x, y, z \in A$. A relação anterior é designada por *identidade cronológica*.

Dada uma álgebra cronológica livre com um único gerador λ e uma derivação δ na álgebra, a acção da derivação nos elementos da álgebra é definida à custa da sua acção sobre o gerador λ , $\delta \lambda = \lambda \star \lambda$. Tomando esta derivação e a regra

$$p_{k+1}(\lambda) = \delta^k \lambda.$$

¹ $n!!$ representa o produto de todos os números ímpares menores ou iguais que n .

constrói-se uma sequência de polinómios cujos primeiros elementos são

$$p_1(\lambda) = \lambda, \quad p_2(\lambda) = \delta\lambda = \lambda * \lambda, \quad p_3(\lambda) = \delta^2\lambda = (\lambda * \lambda) * \lambda + \lambda * (\lambda * \lambda), \dots$$

O modelo anterior foi proposto por *Agrachev et al.* em [AGS89]. Nesse trabalho encontram-se, ainda, outras formas de gerar os elementos da álgebra.

Um dado fundamental para a determinação da expansão (2.38) é o facto de o espaço linear dos campos vectoriais não autónomos X_t absolutamente contínuos tais que $X_0 = 0$ ter a estrutura de álgebra cronológica quando munido com o seguinte produto, [AG81].

Definição 2.6 (Produto cronológico). *Dados dois campos vectoriais não autónomos e absolutamente contínuos em t define-se o produto cronológico dos campos X . e Y . como*

$$(X * Y)_t = \int_0^t \left[X_\tau, \frac{d}{d\tau} Y_\tau \right] d\tau. \quad (2.45)$$

O produto cronológico é não associativo e satisfaz a identidade cronológica (2.44). Além disso, usando integração por partes, prova-se que

$$(X * Y)_t - (Y * X)_t = [X_t, Y_t].$$

Note-se que, enquanto o parêntesis de Lie depende unicamente do valor dos campos num dado instante, o produto cronológico depende do valor dos campos envolvidos num intervalo do tipo $0 \leq \tau \leq t$.

Apresenta-se sucintamente a obtenção de uma expansão para o logaritmo V_t definido no início da presente secção quando X_t depende linearmente de um parâmetro pequeno $\varepsilon > 0$, $X_t = \varepsilon X_t$. Neste caso tem-se $V_t = V_t(\varepsilon)$ e pretende-se determinar uma expansão em séries de potências do parâmetro ε para o logaritmo tomando t como um parâmetro fixo

$$V_t(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} V_t^{(k)}.$$

Por (2.30),

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} e^{V_t(\varepsilon)} = \int_0^1 e^{-\tau \text{ad } V_t(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_t(\varepsilon) d\tau \circ e^{V_t(\varepsilon)}.$$

Por outro lado, por (2.33)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon X_\tau d\tau = \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \varepsilon X_\theta d\theta \right) X_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon X_\tau d\tau.$$

Derivando, em ordem a ε , ambos os termos em $e^{V_t(\varepsilon)} = \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon X_\tau d\tau$, pelas igualdades anteriores, vem

$$\int_0^1 e^{-\tau \text{ad } V_t(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_t(\varepsilon) d\tau \circ e^{V_t(\varepsilon)} = \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \varepsilon X_\theta d\theta \right) X_\tau d\tau \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^t \varepsilon X_\tau d\tau$$

ou ainda

$$\int_0^1 e^{-\tau \text{ad } V_t(\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_t(\varepsilon) d\tau = Z_t(\varepsilon) \quad (2.46)$$

denotando, de acordo com (2.34),

$$Z_t(\varepsilon) = \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \varepsilon X_\theta d\theta \right) X_\tau d\tau.$$

Assim, usando (2.40), a igualdade (2.46) escreve-se como (cf. (2.39))

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_t(\varepsilon) = \varphi(\text{ad } V_t(\varepsilon)) Z_t(\varepsilon)$$

ou ainda

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} V_t(\varepsilon) = Z_t(\varepsilon) + \frac{1}{2} \text{ad } V_t(\varepsilon) Z_t(\varepsilon) + \sum_{k=2}^{\infty} b_k \text{ad}^k V_t(\varepsilon) Z_t(\varepsilon) \quad (2.47)$$

atendendo à Observação 2.3.

O campo $Z_t(\varepsilon)$ verifica a igualdade (2.35), isto é,

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z_t(\varepsilon) = \int_0^t \left[Z_\tau(\varepsilon), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} Z_\tau(\varepsilon) \right] d\tau = (Z_t(\varepsilon) * Z_t(\varepsilon))_t \quad (2.48)$$

e conhecida a relação anterior, constrói-se a série de potências para $Z_t(\varepsilon)$

$$Z_t(\varepsilon) = Z_t(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k Z_t^{(k)}(0)$$

onde

$$Z_t(0) = \overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau \quad \text{e} \quad Z_t^{(k)}(0) = \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} Z_t(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Definindo recursivamente a sequência de polinómios

$$p_{k+1}(Z_t(0)) = \frac{\partial^k}{\partial \varepsilon^k} Z_t(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$$

escreve-se

$$Z_t(\varepsilon) = Z_t(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} p_k(Z_t(0)). \quad (2.49)$$

Em [AGS89] não são apresentadas fórmulas explícitas para o cálculo de $Z_t^{(k)}$. Uma expressão para tais fórmulas foram, posteriormente, determinadas por Rocha, *vide* [Roc03], onde a expansão

$$V_t(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} V_t^{(k)}$$

é obtida das igualdades (2.47) (2.49). Fórmulas explícitas para os dois primeiros termos da série são

$$\begin{aligned} V_t^{(1)} &= \int_0^t X_\tau d\tau \\ V_t^{(2)} &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\int_0^{\tau_1} X_{\tau_2} d\tau_2, X_{\tau_1} \right] d\tau_1. \end{aligned}$$

2.8.3 Expansão assintótica

A expansão em série para o campo $\ln P_t$ dada por (2.38), (2.42) nem sempre é uma convergente. No entanto, representa assintoticamente o campo $\ln P_t$ no sentido da seguinte proposição cuja demonstração se pode encontrar em [AG79].

Proposição 2.10. *Se*

$$\int_0^t \|X_\tau\|_{s+m} d\tau \leq 1$$

então

$$\left\| \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t X_\tau d\tau - e^{\sum_{k=1}^m V_t^{(k)}} \right) \varphi \right\|_{s,K} = O(t^{m+1}), \quad t \rightarrow 0$$

para toda a aplicação $\varphi \in C^\infty(V)$, $s > 0$ e K um subconjunto compacto de V onde $V_t^{(k)}$ é dado por (2.42).

Sob certas condições pode-se provar, ainda, a convergência de (2.38), (2.42). Com efeito, seja B uma sub-álgebra da álgebra de Lie $\text{Der } V$ (cf. Observação 2.1) na qual está definida uma norma $\|\cdot\|$ que verifica

$$\|[X, Y]\| \leq \|X\| \|Y\|$$

para todos os campos vectoriais $X, Y \in B$. Com esta norma, B torna-se num espaço de Banach.

Teorema 2.11 ([AG79]). *Seja $X_t \in B$ para todo o $t \in \mathbb{R}$. A série (2.38), (2.42) converge absolutamente em B se*

$$\int_0^t \|X_\tau\| d\tau < 0.44.$$

2.9 Comentário

A velocidade angular introduzida em (2.34), e de acordo com as designações utilizadas neste trabalho, dever-se-ia designar por velocidade angular à esquerda na medida em que satisfaz a equação

$$\frac{\partial}{\partial s} R_t(s) = Z_t(s) \circ R_t(s).$$

Pode-se definir velocidade angular à direita. Designado

$$L_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t F_\tau(s) d\tau, \quad W_t = \int_0^t \text{Ad} \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau F_\theta(s) d\theta \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial s} F_\tau(s) d\tau$$

a igualdade (2.32) escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial s} L_t(s) = L_t(s) \circ W_t(s)$$

e $W_t(s)$ representaria a velocidade angular à direita.

Capítulo 3

Estabilidade e controle

3.1 Estabilidade no sentido de Lyapunov

Considere-se a equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = X_t(p), \quad p \in V \quad (3.1)$$

onde X_t é um campo vectorial diferenciável em V . Sendo V uma variedade compacta, o problema de Cauchy com condição inicial $p(t_0) = p_0$ tem solução única definida num intervalo real I contendo t_0 .

Um ponto $p_e \in V$ é um *ponto de equilíbrio* da equação diferencial (3.1) se $X_t(p_e) = 0$, para todo o $t \in \mathbb{R}$. Note-se que, neste caso, a curva $p(\cdot) \equiv p_e$ é solução da equação (3.1) e, pelo teorema da existência e unicidade de solução, não há outra solução que passe em $p_e \in V$. Esta diz-se uma *solução de equilíbrio*.

Definição 3.1 (Equilíbrio estável). *O ponto de equilíbrio p_e do sistema (3.1) é estável no sentido de Lyapunov se, para cada vizinhança U de p_e em V , existir uma vizinhança U_1 de p_e em U tal que toda a solução $p(\cdot)$ com início em U_1 está definida e permanece em U para todo o $t > t_0$.*

Se, além disso, a vizinhança U_1 puder ser escolhida tal que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p_e$$

para toda a solução com início em U_1 então diz-se que o ponto de equilíbrio p_e é *assimptoticamente estável*.

Um ponto que não seja estável, diz-se equilíbrio instável. Formalmente, o ponto p_e é um ponto de *equilíbrio instável* se existe uma vizinhança U de p_e em V tal que para toda a vizinhança U_1 de p_e em U existe pelo menos uma solução $p(\cdot)$ com início em U_1 que não permanece em U para todo o $t > t_0$.

De uma forma geral, a vizinhança U_1 referida anteriormente, além de depender de U , depende do instante inicial t_0 . Caso U_1 não dependa de t_0 diz-se que o equilíbrio é *uniformemente estável*. Como consequência imediata, no caso autónomo, a estabilidade é sempre uniforme.

Exemplo 3.1. O sistema linear $\dot{x} = -x/(1+t)$, definido em \mathbb{R} e com condição inicial $x(t_0) = x_0$, tem como solução a função

$$x :]-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto x(t) = x_0 \frac{1+t_0}{1+t}.$$

A origem é um ponto de equilíbrio estável do sistema e embora $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ a estabilidade assintótica não é uniforme pois depende de t_0 .

Tal como se pode estudar a estabilidade de soluções de equilíbrio, também se pode estudar a estabilidade de soluções de não equilíbrio. Para tal, basta considerar uma mudança de referencial. Suponha-se que $p_n(\cdot)$ é uma solução de não equilíbrio da equação (3.1). Defina-se

$$q(t) = p(t) - p_n(t) + p_e \quad \text{e} \quad Q_t(q) = X_t(q + p_n(t) - p_e) - X_t(p_n(t)).$$

Ora, $Q_t(p_e) = 0$ pelo que $q(\cdot) = p_e$ é um equilíbrio do sistema

$$\dot{q}(t) = Q_t(q).$$

Verifica-se que a solução $p(\cdot) = p_n(\cdot)$ da equação (3.1) será estável (assintoticamente estável, instável) se e só se $q(\cdot)$ for uma solução estável (assintoticamente estável, instável, respectivamente) do novo sistema.

3.2 Sistemas periódicos e teorema de Floquet

No caso do campo X_t em (3.1) ser periódico, o estudo da estabilidade do sistema não autónomo reduz-se ao estudo de um sistema autónomo. A análise clássica deste problema considera sistemas lineares

$$\frac{d}{dt}p(t) = A(t)p \tag{3.2}$$

onde¹ $p \in \mathbb{R}^n$, $A(\cdot)$, $t \geq 0$, é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções contínuas e $A(t+T) = A(t)$, $T > 0$.

Um conjunto de n soluções linearmente independentes de um sistema linear $\dot{p}(t) = A(t)p$, não necessariamente periódico, definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, designa-se por *conjunto fundamental de soluções* e forma uma base para o espaço das soluções. Uma matriz P_t cujas colunas sejam os vectores da base do espaço das soluções do sistema diz-se *matriz fundamental* do sistema. Naturalmente esta matriz é uma solução da equação matricial

$$\frac{d}{dt}P_t = A(t)P_t \tag{3.3}$$

e, reciprocamente, toda a solução não singular da equação (3.3) é uma matriz fundamental para o sistema linear. Além disso, se for conhecida uma matriz fundamental Q_t , então é possível escrever o conjunto de todas as matrizes fundamentais como $P_t = Q_t C$ onde C é uma matriz constante e não singular. De acordo com a notação introduzida no Capítulo 2

$$P_t = \overleftarrow{\exp} \int_0^t A(\tau) d\tau.$$

¹Pode-se considerar $p \in \mathbb{C}^n$.

Para um sistema periódico, se P_t é uma matriz fundamental então a matriz P_{t+T} é, também, uma matriz fundamental. Além disso, existe uma matriz constante e não singular B tal que $P_{t+T} = P_t B$. Como matrizes constantes associadas a diferentes matrizes fundamentais são semelhantes entre si, os seus valores próprios são invariantes do sistema (3.2) e definem a dinâmica das soluções pois

$$P_{t+kT} = P_t B^k. \quad (3.4)$$

Caso $P_0 = \text{Id}$ conclui-se que $B = P_T$.

Definição 3.2 (Matriz de monodromia). *A matriz*

$$P_T = \overleftarrow{\exp} \int_0^T A(\tau) d\tau \quad (3.5)$$

designa-se por matriz de monodromia¹ *do sistema periódico* (3.2).

Os valores próprios de P_T designam-se por *multiplicadores* do sistema (3.2) e cada número complexo λ tal que $\rho = e^{\lambda T}$, onde ρ é um valor próprio de P_T , chama-se *expoente de Floquet*. Enquanto os multiplicadores são determinados univocamente, a parte imaginária dos expoentes de Floquet está definida a menos de $2\pi i/T$. Considerando o problema de Cauchy para a equação (3.3) com condição inicial $P_0 = \text{Id}$, da fórmula de Ostrogradsky-Jacobi-Liouville² conclui-se que

$$\det P_T = e^{\int_0^T \text{tr} A(\tau) d\tau},$$

pelo que o sistema (3.2) não admite multiplicadores nulos.

Observação 3.1. *A origem do termo multiplicador está associada com o facto de um número λ ser um multiplicador do sistema (3.2) se e só se existir uma solução não trivial $p(\cdot)$ do sistema tal que $p(t+T) = \lambda p(t)$. Para mais detalhes referir-se, por exemplo, a [Adr95].*

A matriz fundamental de um sistema periódico admite uma decomposição como produto de duas matrizes, uma das quais periódica, dada pelo seguinte teorema.

Teorema 3.1 (Floquet). *Cada matriz fundamental do sistema (3.2) pode ser escrita na forma*

$$P_t = \Phi(t) e^{\Lambda t} \quad (3.6)$$

onde $\Phi(t)$ é uma matriz periódica de período T e $\Lambda = \frac{1}{T} \text{Ln } P_T$ é uma matriz constante.

Assim, toda a solução do sistema linear (3.2), $p(t) = P_t p_0$, $t \geq 0$, pode ser escrita como

$$p(t) = \Phi(t) e^{\Lambda t} p_0, \quad t \geq 0. \quad (3.7)$$

O logaritmo que ocorre na definição de Λ é representado com letra maiúscula já que representa o logaritmo principal. Recorde-se que, para números complexos o logaritmo não está definido univocamente mas módulo 2π : $\ln r e^{i\theta} = \text{Ln } r + \Theta$ onde $\theta = \Theta + 2n\pi$, $-\pi < \Theta \leq \pi$. Note-se também que, toda a matriz não singular admite logaritmo.

¹Também designada por “operador de transição de um período”, [Arn85]

²Também referenciada com fórmula de Abel-Jacobi-Liouville: $\det P_t = \det P_0 e^{\int_0^t \text{tr} A(\tau) d\tau}$, $t \in I$

Uma extensão directa do Teorema de Floquet ao caso não linear é referida por Sarychev em [Sar01a]. Há, no entanto, algumas questões técnicas a ter em atenção na medida em que logaritmo de um difeomorfismo nem sempre está definido.

O Teorema de Floquet permite reduzir o sistema não autónomo (3.2) a um sistema de coeficientes constantes, não sendo, então, necessário o estudo da estabilidade de sistemas não autónomos. Com efeito, definindo

$$p = \Phi(t)q \quad (3.8)$$

e substituindo em (3.2) vem $\dot{q} = \Phi_t^{-1}(A_t\Phi_t - \dot{\Phi}_t)q$. Por outro lado, derivando $\Phi_t = P_t e^{-\Lambda t}$ vem $\dot{\Phi}_t = A_t\Phi_t - \Phi_t\Lambda$ pelo que

$$\frac{d}{dt}q(t) = \Lambda q. \quad (3.9)$$

A igualdade (3.8) é designada por *transformação de Lyapunov*.

O seguinte resultado, da teoria dos sistemas lineares autónomos, [HS74], fornece condições para a estabilidade da solução nula do sistema anterior.

Lema 3.2. *A solução nula do sistema autónomo (3.9) é estável se e só se todos os valores próprios de Λ têm parte real não positiva e os que têm parte real nula têm multiplicidade um. A solução é assintoticamente estável se e só se todos os valores próprios de Λ têm parte real negativa.*

A derivação do resultado sobre a estabilidade para a solução nula do sistema (3.2) faz-se da relação $\Lambda = 1/T \ln P_T$. Na passagem há que ter em conta dois factos: a presença de T e de \ln . Assim, se λ é valor próprio de λ então $e^{T\lambda}$ é valor próprio de P_T . Daqui obtém-se condições para a estabilidade da solução nula do sistema não autónomo (3.2), [Adr95].

Teorema 3.3 (Estabilidade de sistemas periódicos). *A solução nula do sistema (3.2) é estável se e só se todos expoentes de Floquet de P_T têm parte real não positiva e os expoentes com parte real nula têm multiplicidade um. A solução é assintoticamente estável se e só se os valores próprios de P_T são, em módulo, menores que um.*

3.3 Método da medianização

O conjunto das equações diferenciais que admitem solução analítica ou uma descrição qualitativa completa é bastante reduzido. O *método da medianização* permite estudar equações perturbadas, isto é, equações que, não sendo de um tipo conhecido, lhe são “próximas”.

Considere-se o problema de Cauchy para o sistema linear (3.2) supondo-se, agora, a dependência de um parâmetro ε

$$\frac{d}{dt}p(t) = \varepsilon A(t)p, \quad p(0) = p_0 \quad (3.10)$$

onde, mais uma vez, onde $p \in \mathbb{R}^n$, $A(\cdot), t \geq 0$, é uma matriz $n \times n$ cujas entradas são funções contínuas e tal que $A(t+T) = A(t)$, $T > 0$. Supõe-se $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ um parâmetro pequeno. Não é necessário que o campo vectorial que define a dinâmica do sistema seja linear. Com efeito, o método da medianização é ainda válido para sistemas não lineares $\dot{p}(t) = \varepsilon X_t(p)$ com $p \in V$.

Definição 3.3 (Medianização de ordem 1). *A medianização de ordem 1 do campo vectorial linear associado ao problema (3.10) é o campo linear autónomo*

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T A(\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

O campo vectorial A é também designado por *média* do campo $A(\cdot)$. Para o campo não linear, define-se a primeira medianização como o campo vectorial autónomo dado por

$$\frac{1}{T} \int_0^T X_\tau(p) d\tau.$$

onde $p \in V$ é fixo.

Recorrendo ao campo vectorial definido por (3.11), define-se o problema de Cauchy autónomo

$$\dot{q}(t) = \varepsilon Aq, \quad q(0) = p_0 \quad (3.12)$$

que se designa por *sistema medianizado*.

O *princípio da medianização* consiste em substituir a equação original pela medianizada. Este princípio representa, geometricamente, uma mudança de referencial. Isto é, procura-se eliminar as perturbações escolhendo um sistema de coordenadas apropriado.

Tendo em mente estudar o sistema original recorrendo ao sistema medianizado, importa determinar sob que condições os fluxos definidos pelos sistemas (3.10) e (3.12) coincidem e em que sentido coincidem. O parâmetro ε desempenha um papel fundamental neste estudo. O resultado seguinte relaciona as soluções dos problemas de Cauchy (3.10) e (3.12) no caso não linear, [SV85], [BM61]. Para garantir a unicidade da solução é, obviamente, exigido que o campo vectorial que define o sistema seja Lipschitziano na variável $p \in \mathbb{R}^n$. No caso de $p \in V$, V uma variedade compacta, a unicidade da solução está garantida.

Teorema 3.4 (Medianização). *Considerem-se os problemas de Cauchy (3.10) e (3.12) com $p, q, p_0 \in V$, $t \geq t_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Suponha-se que $q(t)$ pertence a um subconjunto interior a \mathbb{R}^n na escala de tempo $1/\varepsilon$. Nestas condições $|p(t) - q(t)|$ é $O(\varepsilon)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ na escala de tempo $1/\varepsilon$.*

Formalmente, diz-se que $f(t, \varepsilon)$ é $O(\delta_0(\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ na escala de tempo $\delta^{-1}(\varepsilon)$ se a estimativa for válida para $0 \leq \delta(\varepsilon)t \leq L$ sendo L uma constante independente de ε . Supõe-se δ, δ_0 funções positivas (ou negativas) em $[0, \varepsilon_0]$ cujo limite existe quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Correctamente, o Teorema 3.4 deveria ser referido como “teorema da medianização de ordem 1”, pois é possível definir medianizações de ordem superior à primeira.

Estabelecida a relação entre as soluções do problema perturbado e do sistema medianizado, pode-se considerar um segundo tipo de problema da teoria da medianização: estabelecer relações entre as propriedades da solução exacta e da solução do sistema medianizado. Neste caso, está-se interessado na estabilidade, [BM61].

Lema 3.5. *Se todos os valores próprios da medianização de primeira ordem*

$$\frac{1}{T} \int_0^T A(\tau) d\tau$$

definida em (3.11) têm parte real negativa então o sistema (3.10) é assintoticamente estável para todo o ε suficientemente pequeno. Se a parte real de algum dos valores próprios for positiva então o sistema (3.10) é instável.

Uma situação claramente não considerada no lema anterior é a existência de valores próprios com parte real nula. Para a análise desta situação há que considerar medianizações de ordem superior. Em [SV85] pode-se encontrar o estudo da medianização de segunda ordem enquanto em [BM61] são descritas medianizações de ordem arbitrária.

O Lema 3.5 admite uma reformulação para a matriz de monodromia P_T definida em (3.5), [Sar01b]. O sistema (3.10) é assintoticamente estável para todo o ε suficientemente pequeno se todos os valores próprios da matriz de monodromia do sistema (3.10) estão no interior do círculo unitário. Se pelo menos um valor próprio está fora do círculo unitário então o sistema é instável. Atendendo ao Teorema 3.3, vale o seguinte critério.

Lema 3.6. *Se todos os valores próprios do logaritmo da matriz de monodromia do sistema (3.10) têm parte real negativa então o sistema é assintoticamente estável para ε suficientemente pequeno e fixo. Se pelo menos um valor próprio tem parte real positiva então o é instável.*

Uma vez que o sistema (3.10) depende do parâmetro ε , toda a solução do sistema pode ser escrita como, cf. (3.7),

$$p_\varepsilon(t) = \Phi_\varepsilon(t) e^{\Lambda_\varepsilon t} p_0, \quad t \geq 0. \quad (3.13)$$

Recorde-se que, na Secção 2.8, foi apresentada uma expansão assintótica para o logaritmo de um fluxo dependente de um parâmetro pequeno.

Observação 3.2. *Por vezes a variável t , tal como aparece no sistema (3.10), é designada por variável rápida. Uma variável da forma $\varepsilon\tau$ seria designada por variável lenta. Neste caso, o sistema (3.10) escrever-se-ia na forma*

$$\frac{d}{d\tau}p(\tau) = A(\tau/\varepsilon)p, \quad p(0) = p_0.$$

3.4 Controlo

Um sistema de controlo é, do ponto de vista matemático, definido pelo espaços de estados V (variedade de dimensão n), pelo conjunto U das funções de controlo admissíveis e pela equação diferencial que descreve o modelo

$$\frac{d}{dt}p(t) = X_u(p)$$

onde $p \in V$, $u \in U$ e $t \in \mathbb{R}$.

Os problemas estudados em teoria do controlo podem-se dividir em quatro grandes categorias: controlabilidade, realização, estabilização e observabilidade.

A *controlabilidade* lida com a possibilidade de, dados dois estados do sistema, um inicial e um final, saber se existe uma função de controlo que transporte o sistema do estado inicial ao estado final pretendido. Caso exista tal controlo para qualquer estado inicial dir-se-à que o sistema é *controlável*.

O problema de *realização* consiste em determinar funções de controlo que permitam que o sistema percorra uma trajectória pré definida. No caso dessa trajectória ser uma de equilíbrio do sistema, está-se perante o problema de estabilização. Desta forma, pode-se considerar o problema da estabilização como um caso particular do problema de realização. Explicitamente, dado um estado do sistema, o problema da *estabilização* consiste em determinar funções de controlo que permitam que o sistema permaneça numa vizinhança desse estado.

Na impossibilidade de estudar os estados do sistema, mas podendo estudar uma função destes, está-se na presença do problema da *observabilidade*. Assim, um sistema diz-se observável caso, conhecendo a função de controlo e uma observação, seja possível determinar univocamente o estado inicial do sistema.

S. Meerkov, em [Mee80], introduz a noção de *controlo vibracional*, definindo-a como o efeito de alterar as propriedades de um sistema dinâmico por introdução de vibrações (com média nula) nos seus parâmetros. Uma vez que este tipo de controlo não depende dos estados do sistema nem de perturbações, não é um controlo por *feedback* nem o controlo por *feedforward*, técnicas clássicas de controlo. Numa série de quatro artigos S. Meerkov *et. al* desenvolve diversos conceitos subjacentes à noção de controlo vibracional tais como estabilização e controlabilidade, *vide* [Mee80, Mee82, BBM86b, BBM86b] .

Dado um sistema linear autónomo

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.14)$$

onde $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, é possível estabilizar o sistema introduzindo vibrações periódicas em A da forma $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ onde

$$b_{ij}(t) = \sum_{s=1}^{\infty} k_{ij}^s \sin(w_{ij}t + \phi_{ij}^s)$$

é uma função periódica cuja medianização de ordem 1 é nula. O sistema (3.14) é *vibracionalmente estabilizável* se existir uma matriz periódica $B(\cdot)$ com média nula tal que a solução nula do sistema $\dot{x} = (A + B(t))x$ é assintoticamente estável. Se o sistema (3.14) for *observável em princípio*, isto é se existir um vector c tal que o sistema é observável relativamente ao output (c, x) , então é estabilizável se e só se a matriz A tiver traço negativo, [Mee80].

Recorrendo a uma matriz quase-triangular inferior definida por $B(t) = (k_{ij} \sin w_{ij}t)_{i,j=1}^n$, onde $k_{ij} = 0; i \leq j$, $w_{ij} \gg \sup |du/dt|$ e w_{ij} e w_{s1} com $ij \neq s1$ são incomensuráveis, obtêm-se condições para a controlabilidade (vibracional) de um sistema não autónomo

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax + ru(t), \quad x, r \in \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

onde A é novamente uma matriz $n \times n$ constante e $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de t com derivada limitada. O estudo do sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = (A + B(t))x + ru \quad (3.16)$$

depende de duas matrizes $F(t) = (F_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ e $C = (c_{ij})_{i,j=1}^n$. Os elementos da matriz F , funções quase periódicas com média nula, são obtidos como coeficientes quando da integração sucessiva das n equações diferenciais do sistema quase-triangular inferior $\dot{x} = B(t)x$ e

$$c_{ij} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F_{ij}^2(t) dt.$$

Neste caso, se as amplitudes e as frequências das vibrações forem suficientemente altas, então o sistema

$$\frac{d}{dt}y(t) = (A + \bar{B})y$$

descreve em média os movimentos do sistema não autónomo (3.16), onde $\bar{B} = (-a_{ji}c_{ij})_{ij=1}^n$, [Mee80]. Quer isto dizer que as propriedades deste sistema são válidas, em média, para o sistema (3.16). Assim, a introdução das vibrações caracterizadas por B conduzem a alterações no sistema (3.15) semelhantes às introduzidas pelo feedback definido por \bar{B} . Desta forma, o controlo vibracional só produz efeitos caso $\bar{B} \neq 0$. Um elemento a_{ij} de A é *vibracionalmente controlável* se existir uma matriz quase-periódica $B(\cdot)$ com média nula tal que $\bar{b}_{ij} \neq 0$.

Uma outra questão abordada no âmbito do controlo vibracional é a invariância de um sistema: estudam-se as potencialidades de utilizar um controlo vibracional para obter, do sistema dinâmico, algum tipo de resposta a perturbações externas. Tomando novamente o sistema não autónomo (3.15) e uma sua resposta (c, x) , $c \in \mathbb{R}^n$ e considerando $u(t) \in U$ como uma perturbação externa, U o conjunto das funções limitadas e seccionalmente contínuas, o sistema (3.15) é dito um *sistema invariante* relativamente à resposta (c, x) se, para todo $u \in U$, se tem

$$(c, x_{u_i(t)}) = (c, x_{u_j(t)}), \quad u_i, u_j \in U.$$

sendo $(c, x_{u_i(t)})$ a respostas do sistema com $u = u_i$ sob condições iniciais idênticas. Observe-se que, a esta noção de invariância, não corresponde à independência total da resposta (c, x) face à perturbação u , mas é uma invariância com uma precisão de $1/k_0 \ll 1$ onde $k_0 \leq k_{ij}$. Tomando uma transformação linear em \mathbb{R}^n invertível, seja T , tal que

$$Tr = \xi = [\xi_1, \dots, \xi_n]^T, \quad Tc = \zeta = [0, \dots, 0, \zeta_n]^T$$

e fazendo a substituição $z = Tx$, o sistema (3.15) vem

$$\frac{d}{dt}z(t) = Mz + \xi u, \quad M = TAT^{-1}.$$

O sistema (3.15) é vibracionalmente invariante para a resposta (c, x) se os vectores c e r forem ortogonais e se $\text{sing } m_{ni} = \text{sing } m_{in}$, $i = 1, \dots, n-1$, $(m_{ij})_{i,j=1}^n = M$, onde sing denota a função sinal.

As técnicas do controlo vibracional desenvolvidas no âmbito da teoria dos sistemas lineares não podem ser extendidas ao caso não linear mesmo quando é estudada a linearização uma vez que são exigidas grandes amplitudes de vibração o que torna a linearização inválida, [Mee82].

Considere-se, então, um sistema não linear

$$\frac{d}{dt}x(t) = X(x, \lambda) \tag{3.17}$$

sendo $X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e onde $\lambda \in \mathbb{R}^m$ representa um parâmetro. Suponha-se que para $\lambda = \lambda_0$ o sistema anterior admite um equilíbrio $x_s = x_s(\lambda_0)$. No sistema (3.17) introduzam-se vibrações da forma

$$\lambda(t) = \lambda_0 + f(t)$$

sendo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vectorial quase-periódica cuja medianização de primeira ordem é nula.

Um equilíbrio $x_s = x_s(\lambda_0)$ do sistema (3.17) é *vibracionalmente estabilizável* se, para todo $\delta > 0$ existir uma função vectorial quase-periódica com média nula f tal que o sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = X(x, \lambda_0 + f(t)) \tag{3.18}$$

admite uma solução quase-periódica assintoticamente estável $x^s(t)$ caracterizada por

$$\|\bar{x}^s - x_s(\lambda_0)\| < \delta, \quad \bar{x}^s = \overline{x^s(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^s(t) dt.$$

Se, além disto, $x^s(t) = \text{const} = x_s(\lambda_0)$ então diz-se que $x_s(\lambda_0)$ é um equilíbrio *totalmente estabilizável*. Caso só uma componente de $x_s(\lambda_0)$ seja vibracionalmente estabilizável diz-se que este equilíbrio é parcialmente estabilizável. Formalmente $x_s(\lambda_0) = [x_{s1}(\lambda_0), \dots, x_{sn}(\lambda_0)]^T$ é *parcialmente estabilizável* relativamente à componente $x_{si}(\lambda_0)$ se, para todo o $\delta > 0$, existir uma função vectorial quase-periódica com média nula f e $\lambda_1 = \text{const}$ tal que o sistema $\dot{x}(t) = X(x, \lambda_1 + f(t))$ admite uma solução quase-periódica assintoticamente estável $x^s(t) = [x_1^s(t), \dots, x_n^s(t)]^T$ cuja componente i é caracterizada por $\|\bar{x}_i^s - x_{si}(\lambda_0)\| < \delta$. Note-se que, no caso linear, não ocorre estabilização total ou parcial, só ocorre a estabilização vibracional.

Sistemas cujas vibrações sejam aditivas lineares, isto é, sistemas do tipo de (3.18) que possam ser representados por

$$\frac{d}{dt}x(t) = X(x, \lambda_0) + X_1(x, f(t))$$

com $X_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear no segundo argumento, são estudados por Bellman *et. al* em [BBM86b]. Analisando as situações em que X_1 é do tipo $B(t)x$, $[0, \dots, 0, l(t)]^T$ ou $L(t)$, Bellman *et al* conclui que no caso não linear a estabilização vibracional e parcial são as formas típicas de estabilização, enquanto a estabilização total só pode ocorrer para equilíbrios triviais em sistemas com vibrações da forma $B(t)x$. O caso particular de vibrações lineares periódicas foi inicialmente abordado por S. Meerkov com a análise do sistema

$$\frac{d}{dt}x(t) = X(x) + \frac{\alpha}{\varepsilon} B\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)x, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (3.19)$$

onde $B(t/\varepsilon)$ é uma matriz periódica e de média nula, [Mee82]. Neste caso, o conceito de estabilidade vibracional traduz-se pela existência de uma matriz B periódica e de média nula tal que o sistema (3.19) admite uma solução periódica assintoticamente estável $x^s(t/\varepsilon)$ da forma

$$x^s(\tau) = e^{\alpha \int_0^\tau B(s) ds} y^*(\tau), \quad \tau = t/\varepsilon \quad \text{e} \quad \|y^*(\tau) - x_s\| < \varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

onde $y^*(\tau)$ é uma função vectorial periódica de período igual ao de $B(\tau)$. Denote-se por T o período da matriz $B(\tau)$. Existindo uma vizinhança U do ponto de equilíbrio x_s do sistema não forçado $\dot{x}(t) = X(x)$ tal que

$$\|X(x)\| \leq M_1 < \infty, \quad \|X(x') - X(x'')\| \leq M_2 < \infty, \quad x, x', x'' \in U \quad (3.20)$$

o equilíbrio x_s é estabilizável vibracionalmente se a equação não linear autónoma

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\alpha \int_0^\tau B(s) ds} X(e^{\alpha \int_0^\tau B(s) ds} z) d\tau \quad (3.21)$$

tiver um equilíbrio $z_s = x_s$ assintoticamente estável. Esta última equação resulta de duas mudanças de variável no sistema $\dot{x}(t) = X(x)$: uma da variável independente $\tau = t/\varepsilon$ e outra da variável dependente definida à custa da transformação de Lyapunov

$$x(\tau) = e^{\alpha \int_0^\tau B(s) ds} y(\tau).$$

Assim, o sistema não forçado $\dot{x}(t) = X(x)$ toma a forma

$$\frac{d}{d\tau}y(\tau) = \varepsilon e^{-\alpha \int_0^\tau B(t)dt} X(e^{\alpha \int_0^\tau B(t)dt} y).$$

Verificando-se (3.20), pode-se aplicar o princípio da medianização à última equação e obtém-se (3.21).

3.5 Comentário

A noção de estabilidade não é, de longe, única. A mais frequente é a sugerida por Lyapunov¹ e introduzida na Secção 3.1. Uma outra noção de estabilidade é, por exemplo, a noção de estabilidade estrutural apresentada por Andronov e Pontryagin². Enquanto a estabilidade de Lyapunov reflecte as alterações nos dados do problema, a estabilidade estrutural estuda os efeitos das alterações no modelo. Ou seja, enquanto a estabilidade de Lyapunov aborda a solução das equações, a estabilidade de estrutural aborda o campo vectorial que define a própria equação. No Capítulo 6 recorrer-se-à, ainda, a uma outra forma de estabilidade, esta no sentido de Poisson.

Os conceitos de estabilidade e medianização introduzidos neste capítulo serão explorados nos Capítulos 4 e 5 no âmbito das equações ordinárias e das equações parciais, respectivamente. A questão da controlabilidade de um sistema será abordada no Capítulo 6 para um sistema formado por um pêndulo sobre um kart.

A forma de controlo vibracional a usar no estudo do Capítulo 4 não é do tipo estudado por Meerkov ou Bellman, uma vez que não é linear nos estados. Já a função de controlo usada no estudo da estabilização de uma corda é linear dos estados.

O controlo vibracional poderá ter particular interesse em aplicações às equações com derivadas parciais pois, com frequência, é impossível medir todos os modos e aplicar um controlo de *feedback*, [Mee80] como se verá no Capítulo 5.

¹A.M. Lyapunov. *The general problem of the stability of motion*. Ph.D thesis, University of Moscow, 1892

²A.A. Andronov, L.S. Pontryagin. *Systèmes grossiers Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 14(5):247250, 1937

Capítulo 4

Pêndulo duplo invertido

Os problemas da estabilidade e estabilização da posição vertical, normalmente instável, de um *pêndulo invertido* têm sido largamente estudados, sendo a estabilização atingida por aplicação de uma oscilação ao pivô. Algumas referências interessantes aos primeiros trabalhos (começando no início do Séc. XX) sobre o assunto podem ser encontrados em [SELF01]. Duas publicações introdutórias ao campo do controlo vibrante e da mecânica vibrante são [BBM86b, BBM86a] e [Ble00].

Mencione-se, a título de exemplo, um resultado apresentado em [Arn89] referente à estabilidade de um pêndulo invertido de comprimento l cujo pivô é sujeito a uma oscilação harmónica vertical. A estabilidade da posição de equilíbrio é assegurada sempre que o número de oscilações por unidade de tempo for superior ou igual a $\sqrt{3}\omega/8a$, sendo que $\omega^2 = g/l$ e a é a amplitude de oscilação do ponto de suspensão.

Sarychev, em [Sar01b, Sar01a], considerou a estabilidade de sistemas periódicos. Em particular, o autor analisou o problema de estabilizar a posição vertical de um pêndulo invertido quando o pivô é sujeito a uma oscilação rápida arbitrária e estabeleceu condições para a estabilidade recorrendo às ferramentas do cálculo cronológico e à teoria da medianização. Seguindo as técnicas usadas em [AS87, Sar01a, Sar01b], no presente capítulo obtêm-se condições para a estabilidade da equação das *pequenas oscilações* do pêndulo duplo invertido no caso planar e no caso esférico. Este trabalho encontra-se publicado em [CS05b].

4.1 Sistema mecânico

Considere-se o sistema mecânico formado por dois *pêndulos matemáticos* invertidos. Cada pêndulo está num campo gravitacional sem tensões nem atrito e descreve um movimento planar. O modelo matemático de cada pêndulo é constituído por uma massa m_i e uma barra inextensível, de massa desprezável e comprimento r_i . Assumindo que não existe rotação axial das barras, cada pêndulo tem um único grau de liberdade.

Suponha-se que o pivô do primeiro pêndulo é sujeito a uma oscilação rápida e arbitrária $\delta s(k t)$ onde $\delta > 0$ é um parâmetro pequeno fixo e k pode ser arbitrariamente grande sendo que $\delta k > 1$. Suponha-se ainda que s é uma função de classe $C^2(\mathbb{R})$ periódica de período 1 tal que $\dot{s}(0) = 0$.

Considere-se um sistema de coordenadas com a origem no pivô do primeiro pêndulo. Seja $\theta_i \equiv \theta_i(t); i = 1, 2$ o ângulo formado por cada pêndulo com a parte positiva do eixo vertical no instante t e $\theta \equiv \theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t))$. Como habitual, g designa a aceleração da gravidade

em ms^{-2} . A energia cinética e potencial do *pêndulo duplo* são dadas, respectivamente, por

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

$$U(t, \theta) = ((m_1 + m_2) r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2)(g + \delta k^2 \ddot{s}(kt)).$$

O pêndulo duplo invertido admite quatro pontos de equilíbrio (pares de ângulos), são eles $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$ e (π, π) . A posição na qual se está interessado corresponde a $\theta = (0, 0)$.

O Lagrangeano é dado por $L(t, \theta, \dot{\theta}) = T(\theta, \dot{\theta}) - U(t, \theta)$, onde $T(\theta, \dot{\theta}) = \langle C(\theta) \dot{\theta}, \dot{\theta} \rangle / 2$ e $C(\theta)$ é uma matriz simétrica. Aplicando a transformação de Legendre, a variável adjunta p é

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = C(\theta) \dot{\theta}$$

e o Hamiltoniano escreve-se como

$$H(\theta, \dot{\theta}, p) = \langle p, \dot{\theta} \rangle - L(t, \theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \langle p, C^{-1}(\theta) p \rangle + U(t, \theta)$$

onde $C^{-1}(\theta)$ é ainda uma matriz simétrica. Para obter a linearização do Hamiltoniano numa vizinhança do ponto de equilíbrio $\theta_0 = (0, 0)$, substitui-se $U(t, \theta)$ pelo segundo termo da sua expansão em série de Taylor em θ_0 : $\langle B(t) \theta_0, \theta_0 \rangle / 2$ onde

$$B(t) = \frac{\partial^2}{\partial q^2} U(t, \theta_0).$$

O Hamiltoniano, H^ℓ , associado ao sistema forçado relativo às equações linearizadas do movimento na vizinhança do ponto de equilíbrio θ_0 é, então,

$$H^\ell(t, p, \theta) = \frac{1}{2} \left(\langle p, C p \rangle + \langle B(t) \theta, \theta \rangle \right) \quad (4.1)$$

com $B(t) = -[g A + \delta k^2 \ddot{s}(kt) A]$, A e C são matrizes constantes dependentes dos parâmetros do sistema m_1, m_2, r_1, r_2 :

$$A = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) r_1 & 0 \\ 0 & m_2 r_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} (r_1^2 m_1)^{-1} & -(r_1 r_2 m_1)^{-1} \\ -(r_1 r_2 m_1)^{-1} & (m_1 + m_2)(r_2^2 m_2 m_1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Na forma matricial, o Hamiltoniano escreve-se como

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & C \\ g A + \delta k^2 \ddot{s}(kt) A & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ p \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = kt$ e denotando $z = (\theta, p)^T$ e $\dot{z} = dz/d\tau$, o sistema (4.2) transforma-se no sistema linear não autónomo

$$\dot{z}(\tau) = Q(\tau) z(\tau) \quad (4.3)$$

onde

$$Q(\tau) = k^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & C \\ g A + \delta k^2 \ddot{s}(\tau) A & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}.$$

Dada a periodicidade de s , o sistema anterior é, também ele, periódico.

Para estabelecer o resultado sobre a estabilidade há que estudar a matriz de monodromia do sistema (4.3) associado ao Hamiltoniano (4.1). Este estudo recorre à fórmula da variação das constantes (2.27) introduzida na Secção 2.6. No entanto, o maior esforço concentra-se no estudo da expansão em série para o logaritmo da matriz de monodromia. Após estudar a convergência da série e estimar o termo resto da sua truncatura, o resultado sobre a estabilidade do pêndulo duplo obtém-se da informação espectral da série truncada.

4.2 Matriz de monodromia

Determine-se, recorrendo à fórmula da variação das constantes do cálculo cronológico, a matriz de monodromia do sistema (4.3). Escrevendo o sistema na forma $\dot{z}(\tau) = [k^{-1}M + \delta k N(\tau)] z(\tau)$ onde

$$M = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & C \\ gA & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad N_\tau = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ \ddot{s}(\tau)A & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix},$$

pela fórmula da variação das constantes (2.27) obtém-se

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\exp} \int_0^1 (k^{-1}M + \delta k N_\tau) d\tau &= \overleftarrow{\exp} \int_0^1 \delta k N_\tau d\tau \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^1 \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau -\text{ad}(\delta k N_\sigma) d\sigma k^{-1}M \right) d\tau \\ &= \overleftarrow{\exp} \int_0^1 \delta k N_\tau d\tau \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^1 D_\tau d\tau. \end{aligned}$$

Uma vez que s é periódica de período 1, $\int_0^1 N_\tau d\tau = \mathbf{0}_4$ e

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^1 \delta k N_\tau d\tau = \mathbf{I}_4,$$

onde $\mathbf{0}_4$ e \mathbf{I}_4 representam, respectivamente, a matriz nula e a matriz identidade de ordem 4. Por outro lado, aplicando a expansão (2.15)

$$\begin{aligned} D_\tau &= \overrightarrow{\exp} \left(-\delta k \text{ad} \int_0^\tau N_\sigma d\sigma \right) k^{-1}M = e^{-\delta k \text{ad} \int_0^\tau N_\sigma d\sigma} k^{-1}M \\ &= \left(\mathbf{I}_4 + (-\delta k) \text{ad} \int_0^\tau N_\sigma d\sigma + \frac{(-\delta k)^2}{2} \text{ad}^2 \int_0^\tau N_\sigma d\sigma + \dots \right) k^{-1}M. \end{aligned} \quad (4.4)$$

No entanto

$$\text{ad} \left(\int_0^\tau N_\sigma d\sigma \right) M = \begin{pmatrix} -CA\dot{s}(\tau) & \mathbf{0}_2 \\ \mathbf{0}_2 & AC\dot{s}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \text{ad}^2 \left(\int_0^\tau N_\sigma d\sigma \right) M = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 & \mathbf{0}_2 \\ -2ACA\dot{s}^2(\tau) & \mathbf{0}_2 \end{pmatrix}$$

e

$$\text{ad}^j \left(\int_0^\tau N_\sigma d\sigma \right) M = \mathbf{0}_4, \quad \text{para } j \geq 3.$$

Assim, os termos aos quais correspondem as reticências no segundo membro de (4.4) são nulos, pelo que a série termina no segundo termo e a matriz de monodromia pode ser representada como

$$P_1 = \overleftarrow{\exp} \int_0^1 D_\tau d\tau$$

onde

$$D_\tau = \begin{pmatrix} \delta \dot{s}(\tau) C A & k^{-1} C \\ k^{-1} g A - \delta^2 k \dot{s}^2(\tau) A C A & -\delta \dot{s}(\tau) A C \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Embora a matriz P_1 seja determinada univocamente, a sua representação como exponencial cronológica $\overleftarrow{\exp} \int_0^1 D_\tau d\tau$ não é única. A presente construção de D_τ permite estabelecer resultados sobre a estabilidade do sistema baseados nas propriedades da medianização de D_τ .

De acordo com os resultados vistos na Secção 3.2, o sistema (4.3) não pode ser assintoticamente estável pois o traço de $\ln P_1$ é nulo. Pode, no entanto, ser estável caso todos os valores próprios de $\ln P_1$ sejam números imaginários (parte real nula). Pretende-se agora determinar uma expansão assintótica para $\ln P_1$. Designe-se

$$\Lambda_{0,1}(D_\tau) = \ln P_1 = \ln \overleftarrow{\exp} \int_0^1 D_\tau d\tau.$$

Na Secção 2.8 mostrou-se que $\Lambda_{0,1}(D_\tau)$ admite uma expansão

$$\Lambda_{0,1}(D_\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \Lambda^{(m)} \quad (4.6)$$

com $\Lambda^{(m)}$ definida por (2.42)

$$\Lambda^{(m)} = \int_0^1 \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{m-1}} g_m(D_{\tau_1}, \dots, D_{\tau_m}) d\tau_m \cdots d\tau_2 d\tau_1.$$

onde os polinómios g_m são definidos por (2.43)

$$g_m(D_{\tau_1}, \dots, D_{\tau_m}) = \sum_{\alpha=1}^{(2m-3)!!} b_{v_{1\alpha}} \dots b_{v_{m\alpha}} w_\alpha, \quad m \geq 2, \quad b_k = B_k/k!,$$

onde B_k é o k -ésimo número de Bernoulli (cf. Observação 2.3).

Como w_α é um parêntesis Lie de dimensão $(m-1)$, procure-se uma estimativa por excesso para $[D_{\tau_m}, \dots, [D_{\tau_2}, D_{\tau_1}] \dots]$ onde a matriz D_τ é definida por (4.5). Suponha-se que, para todo o $\tau \in [0, 1]$ se tem $|\dot{s}(\tau)| \leq \mu$. É então válido o seguinte resultado cuja demonstração é feita por indução sobre a dimensão do parêntesis de Lie.

Lema 4.1. *Existem constantes positivas σ e a tais que, para todo $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m) \in [0, 1]^m$, o parêntesis de Lie iterado $[D_{\tau_m}, \dots, [D_{\tau_2}, D_{\tau_1}] \dots]$ de dimensão m , $m > 2$, pode ser representado como*

$$\delta^m \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(m)}(\bar{\tau}) (CA)^m + \varepsilon^2 C_{11}^{(m)} & \varepsilon \sigma_{12}^{(m)}(\bar{\tau}) C(AC)^{m-1} + \varepsilon^3 C_{12}^{(m)} \\ \varepsilon^{-1} \sigma_{21}^{(m)}(\bar{\tau}) A(CA)^m + \varepsilon C_{21}^{(m)} & -\sigma_{11}^{(m)}(\bar{\tau}) (AC)^m - \varepsilon^2 (C_{11}^{(m)})^T \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

onde $\varepsilon = (\delta k)^{-1}$, $|\sigma_{ij}^{(m)}(\bar{\tau})| < \sigma^m$ e $\|C_{ij}^{(m)}\| < a^m$ para $i, j = 1, 2$.

Na expressão do parêntesis de Lie de dimensão m apresentada no lema anterior estão presentes dois tipos de expoentes. Um denota a potência, como é o caso de $(CA)^m$, e outro representa uma indexação, como é o caso de $\sigma_{11}^{(m)}$.

Demonstração. Usando a notação $\varepsilon = (\delta k)^{-1}$ escreve-se

$$D_\tau = \delta \begin{pmatrix} \dot{s}(\tau)CA & \varepsilon C \\ \varepsilon g A - \varepsilon^{-1} \dot{s}^2(\tau)ACA & -\dot{s}(\tau)AC \end{pmatrix}$$

e cálculos directos mostram que o parêntesis de Lie de ordem três $[D_{\tau_3}, [D_{\tau_2}, D_{\tau_1}]]$ se pode escrever como

$$\delta^3 \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(3)}(\bar{\tau})(CA)^3 + \varepsilon^2 C_{11}^{(3)} & \varepsilon \sigma_{12}^{(3)}(\bar{\tau})C(AC)^2 + \varepsilon^3 C_{12}^{(3)} \\ \varepsilon^{-1} \sigma_{21}^{(3)}(\bar{\tau})A(CA)^3 + \varepsilon C_{21}^{(3)} & -\sigma_{11}^{(3)}(\bar{\tau})(AC)^3 - \varepsilon^2 (C_{11}^{(3)})^T \end{pmatrix},$$

onde $|\sigma_{11}^{(3)}(\bar{\tau})|, |\sigma_{12}^{(3)}(\bar{\tau})| \leq 8\mu^3$, $|\sigma_{21}^{(3)}(\bar{\tau})| \leq 8\mu^4$ e as matrizes $C_{ij}^{(3)}$ são tais que

$$\|C_{11}^{(3)}\| \leq 6g\mu \|(CA)^2\|, \quad \|C_{12}^{(3)}\| \leq 2g\|(CA)C\|, \quad \|C_{21}^{(3)}\| \leq 2g^2\|ACA\| + 10g\mu^2\|A(CA)^2\|.$$

Além disso, se o parêntesis de Lie de dimensão $m-1$ for dado por

$$\delta^{m-1} \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(m-1)}(\bar{\tau})(CA)^{m-1} + \varepsilon^2 C_{11}^{(m-1)} & \varepsilon \sigma_{12}^{(m-1)}(\bar{\tau})C(AC)^{m-2} + \varepsilon^3 C_{12}^{(m-1)} \\ \varepsilon^{-1} \sigma_{21}^{(m-1)}(\bar{\tau})A(CA)^{m-1} + \varepsilon C_{21}^{(m-1)} & -\sigma_{11}^{(m-1)}(\bar{\tau})(AC)^{m-1} - \varepsilon^2 (C_{11}^{(m-1)})^T \end{pmatrix},$$

então o parêntesis de Lie de dimensão m é dado por (4.7) com

$$|\sigma_{11}^{(m)}(\bar{\tau})| \leq \mu + \sigma^{m-1}, \quad |\sigma_{12}^{(m)}(\bar{\tau})| \leq (\mu + 1)\sigma^{(m-1)} \quad |\sigma_{21}^{(m)}(\bar{\tau})| \leq \mu(\mu + 1)\sigma^{(m-1)}$$

sendo as matrizes $C_{ij}^{(m)}$ tais que

$$\begin{aligned} \|C_{11}^{(m)}\| &\leq \|\mu CA + C\|a^{m-1}, & \|C_{12}^{(m)}\| &\leq \|\mu CA + C\|a^{m-1} \\ \|C_{21}^{(m)}\| &\leq \|(gI + \varepsilon^2 \mu^2 AC)A(CA)^{m-1}\|\sigma^{(m-1)} + \mu^2\|AC(A + I)\|a^{m-1}. \end{aligned}$$

Tendo estabelecido a estimativa anterior para o parêntesis de Lie, prove-se a convergência da série (4.6).

Lema 4.2. A série (4.6) é absolutamente convergente para

$$|\delta| < \frac{0.4432}{\hat{\sigma} a}$$

onde $\hat{\sigma} = (\sigma^m + 1)^{1/m}$ e a, σ são as constantes introduzidas no Lema 4.1.

Demonstração. A demonstração do Lema 4.2 é feita mostrando três desigualdades. Para uma matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, define-se a sua norma por

$$\|A\| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Por simplicidade, denote-se $[D_{\tau_m}, \dots, [D_{\tau_2}, D_{\tau_1}] \dots]$ por D_m . Do Lema 4.1, uma vez que $\varepsilon < 1$,

$$\begin{aligned} \|D_m\| &< \delta^m \max\{\sigma^m \|CA\|^m + \varepsilon^2 \|C_{11}^m\| + \varepsilon^{-1} \sigma^m \|A\| \|CA\|^m + \varepsilon \|C_{21}^m\|; \\ &\quad \varepsilon \sigma^m \|C\| \|AC\|^{m-1} + \varepsilon^3 \|C_{12}^m\| + \sigma^m \|AC\|^m + \varepsilon^2 \|(C_{11}^T)^m\|\} \\ &< \delta^m a^m \max\{\sigma^m + \varepsilon^2 + \varepsilon^{-1} \sigma^m + \varepsilon; \varepsilon \sigma^m + \varepsilon^3 + \sigma^m + \varepsilon^2\} \\ &< \delta^m a^m \max\{\sigma^m(\varepsilon^{-1} + 1) + \varepsilon(\varepsilon + 1); \sigma^m(\varepsilon + 1) + \varepsilon^2(\varepsilon + 1)\}, \\ &< \delta^m a^m [\sigma^m(\varepsilon^{-1} + 1) + \varepsilon(1 + \varepsilon)] < 2\delta^m a^m \varepsilon^{-1} (\sigma^m + 1) \\ &< 2\varepsilon^{-1} \delta^m a^m \hat{\sigma}^m, \end{aligned}$$

onde $\hat{\sigma}^m > \sigma^m + 1$. Assim,

$$\|D_m\| \leq 2\varepsilon^{-1} \delta^m a^m \hat{\sigma}^m. \quad (4.8)$$

De seguida, estabeleça-se, uma estimativa superior para a norma do polinómio g_m . Da definição de g_m , (2.43), vem

$$\|g_m(D_{\tau_1}, \dots, D_{\tau_m})\| \leq \left(\sum_{\alpha=1}^{(2m-1)!!} |b_{v_{1\alpha}} \dots b_{v_{m\alpha}}| \right) \|D_m\| \leq \chi_m \|D_m\|, \quad (4.9)$$

onde χ_m são constantes determinadas pela série de Laurent da função

$$\chi(z) = \frac{z}{2} (1 - \cot \frac{z}{2}) + 2 = \sum_{\alpha=0}^{\infty} |b_{\alpha}| z^{\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}$$

cuja região de convergência é $|z| \leq 2\pi$. Recorde-se que $b_k = B_k/k!$ onde B_k representa o k -ésimo número de Bernoulli.

De (2.42), (4.8) e (4.9) segue que

$$\begin{aligned} \|\Lambda^{(m)}\| &\leq \int_0^1 \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{m-1}} \|g_m(D_{\tau_1}, \dots, D_{\tau_m})\| d\tau_m \dots d\tau_2 d\tau_1 \\ &\leq \chi_m \left(\int_0^1 \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{m-1}} \|D_m\| \right) d\tau_m \dots d\tau_2 d\tau_1 \\ &\leq 2\varepsilon^{-1} \chi_m \delta^m a^m \hat{\sigma}^m \left(\int_0^1 \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{m-1}} d\tau_m \dots d\tau_2 d\tau_1 \right) \\ &\leq 2\varepsilon^{-1} \chi_m \delta^m a^m \hat{\sigma}^m \frac{1}{m!}. \end{aligned}$$

Em [AG79] os autores mostram que, para cada $\gamma \in (0, 2\pi)$

$$\chi_m \leq (m-1)! \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2M(\gamma)}{\gamma} \right)^m$$

onde $M(\gamma) = \max_{z \in \mathbb{C}, |z|=\gamma} |\chi(z)|$. Desta forma

$$\|\Lambda^{(m)}\| < 2\varepsilon^{-1} (m-1)! \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2M(\gamma)}{\gamma} \right)^m \delta^m a^m \hat{\sigma}^m \frac{1}{m!} < \varepsilon^{-1} \gamma \left(\frac{2M(\gamma)}{\gamma} \delta a \hat{\sigma} \right)^m.$$

Concluí-se, então, que a série (4.6) converge absolutamente quando

$$|\delta a \hat{\sigma}| < \max_{\gamma \in (0, 2\pi)} \frac{\gamma}{2M(\gamma)} = 0.4432. \quad \blacksquare$$

Pretende-se, agora, estimar o termo resto em $\Lambda_{0,1}(D_{\tau}) - \Lambda^{(1)}$. Uma vez que

$$\Lambda_{0,1}(D_{\tau}) - \Lambda^{(1)} = \sum_{m=2}^{\infty} \Lambda^{(m)},$$

pelo Lema 4.2, esta série converge para $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Além disso, é válido o seguinte resultado.

Lema 4.3. *Existe uma constante $\xi > 0$ tal que, para a série (4.6), tem-se $\Lambda_{0,1}(D_\tau) - \Lambda^{(1)} = \delta^2 R$ onde*

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} + \varepsilon^2 Q_{11} & \varepsilon R_{12} + \varepsilon^3 Q_{12} \\ \varepsilon^{-1} R_{21} + \varepsilon Q_{21} & -R_{11}^T - \varepsilon^2 Q_{11}^T \end{pmatrix},$$

e $\|R_{ij}\|, \|Q_{ij}\| < \xi; i, j = 1, 2$.

A estrutura por blocos das matrizes $\Lambda^{(m)}$ foi identificada no Lema 4.1. A demonstração das estimativas para cada um dos blocos é análoga. Para o bloco superior esquerdo, por exemplo, tem-se a estimativa

$$\begin{aligned} \|\Lambda_{11}^{(m)}\| &< \frac{\delta^m}{m!} \chi_m \|\sigma_{11}^m(\bar{\tau}) (CA)^m + \varepsilon^2 C_{11}^m\| \\ &< \frac{\delta^m}{m} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2M(\gamma)}{\gamma} \right)^m (\sigma^m \|CA\|^m + \varepsilon^2 \|C_{11}^m\|) \\ &< \frac{\delta^m}{m} \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2M(\gamma)}{\gamma} \right)^m a^m (\sigma^m + \varepsilon^2) \\ &< \delta^2 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{2M(\gamma)}{\gamma} a \right)^2 \left[\left(\delta a \sigma \frac{2M(\gamma)}{\gamma} \right)^{m-2} + \varepsilon^2 \left(\delta a \frac{2M(\gamma)}{\gamma} \right)^{m-2} \right]. \end{aligned}$$

Assim, a série $\sum_{m=2}^{\infty} \Lambda_{11}^{(m)}$ converge absolutamente se $|\delta a \sigma| < \frac{\gamma}{2M(\gamma)}$ e $|\delta a| < \frac{\gamma}{2M(\gamma)}$. Ora, pelo Lema 4.2, as duas condições são verdadeiras uma vez que $\sigma < \bar{\sigma}$ e $\bar{\sigma} > 1$.

4.3 Análise da estabilidade

Os valores próprios da matriz $\Lambda^{(1)}$ desempenham um papel fundamental no estudo das condições de estabilidade do pêndulo.

Calculando explicitamente $\Lambda^{(1)}$, que é a primeira medianização de D_τ , obtém-se

$$\Lambda^{(1)} = \int_0^1 D_\tau d\tau = \begin{pmatrix} 0_2 & k^{-1}C \\ k^{-1}gA - \delta^2 k \bar{s} A C A & 0_2 \end{pmatrix}$$

com $\bar{s} = \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > 0$. A matriz $\Lambda^{(1)}$ é obviamente uma matriz Hamiltoniana de dimensão 4.

Denotando $\delta^2 \bar{s} = \gamma$ e $k^{-1}gA - \gamma k A C A = \Sigma$ o polinómio característico de $\Lambda^{(1)}$ escreve-se

$$\det(\lambda I_4 - \Lambda^{(1)}) = \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_0 \quad (4.10)$$

sendo

$$p_2 = -\text{tr}(k^{-1}\Sigma C) = -k^{-2}g \text{tr}(AC) + \gamma \text{tr}(AC)^2 \quad (4.11)$$

e

$$p_0 = \det(k^{-1}\Sigma C) = \det(k^{-2}g I_2 - \gamma A C) \det(AC). \quad (4.12)$$

Como $\Lambda^{(1)}$ é uma matriz Hamiltoniana, o seu polinómio característico (4.10) é um polinómio bi-quadrático. Se $\Lambda^{(1)}$ é estável e possui dois pares distintos e não nulos de valores próprios imaginários, então p_2, p_0 devem ser positivos. Desta forma, deve-se ter

$$p_2 = -\text{tr}(k^{-1}\Sigma C) > 0 \quad (4.13)$$

e

$$p_0 = \det(k^{-1}\Sigma C) > 0. \quad (4.14)$$

Atendendo à equação (4.11), a desigualdade (4.13) é equivalente a

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > k^{-2} g \frac{\text{tr}(AC)}{\text{tr}(AC)^2}. \quad (4.15)$$

Para estudar o sinal de $\det(k^{-1}\Sigma C)$ em (4.14), comece-se por notar que $\det(AC) > 0$. Então, de (4.12), o sinal de $\det(k^{-1}\Sigma C)$ depende somente do sinal de $\det(k^{-2}g I_2 - \gamma AC)$, que é um polinómio quadrático na variável γ

$$\det(k^{-2}g I_2 - \gamma AC) = \gamma^2 \det(AC) - \gamma k^{-2} g \text{tr}(AC) + k^{-4} g^2 \quad (4.16)$$

e cujo discriminante é

$$\text{tr}^2(AC) - 4 \det(AC) > 0.$$

Desta forma, este polinómio tem duas raízes

$$\gamma_{\pm} = k^{-2} g \frac{-\text{tr}(AC) \pm \sqrt{\text{tr}^2(AC) - 4 \det(AC)}}{2 \det(AC)},$$

e a desigualdade em (4.14) é válida para

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > \gamma_+, \quad (4.17)$$

ou para

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau < \gamma_-. \quad (4.18)$$

A desigualdade (4.15) é incompatível com (4.18), enquanto (4.17) implica (4.15). Assim, (4.15)-(4.18)-(4.17) reduzem-se a uma única desigualdade equivalente a (4.17)

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > k^{-2} g \frac{v(r_1 + r_2) + \sqrt{v^2(r_1 + r_2)^2 - 4v r_1 r_2}}{2v}, \quad (4.19)$$

onde

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1} = v, \det(AC) = \frac{v}{r_1 r_2} > 0, \text{tr}(AC) = v \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} > 0. \quad (4.20)$$

O seguinte resultado vale para o polinómio (4.10).

Lema 4.4. *O discriminante $p_2^2 - 4p_0$ do polinómio (4.10) é não negativo para qualquer escolha dos parâmetros m_1, m_2, r_1, r_2 do sistema. Além disso, é positivo se a condição (4.19) for satisfeita.*

Demonstração. Para simplificar a notação, represente-se $\text{tr}(AC)$, $\text{tr}(AC)^2$ por t_1, t_2 , respectivamente, e $\det(AC)$ por d . Recorde-se que $\delta^2 \bar{s} = \gamma$ e faça-se $\eta = k^{-2}g$. Das equações (4.11), (4.12) e (4.16) conclui-se que

$$\begin{aligned} p_2^2 - 4p_0 &= (-\eta t_1 + \gamma t_2)^2 - 4(\gamma^2 d - \gamma \eta t_1 + \eta^2) d \\ &= \eta^2 (t_1^2 - 4d) - 2\gamma \eta t_1 (t_2 - 2d) + \gamma^2 (t_2 - 2d)(t_2 + 2d). \end{aligned}$$

Para qualquer matriz N de dimensão (2×2) vale a identidade $\text{tr } N^2 = (\text{tr } N)^2 - 2 \det N$. Tomando $N = AC$ obtém-se a igualdade $t_2 = t_1^2 - 2d$. Assim, $t_1^2 - 4d = t_2 - 2d$ e

$$p_2^2 - 4p_0 = (t_1^2 - 4d)(\gamma t_1 - \eta)^2. \quad (4.21)$$

Substituindo $t_1 = \text{tr}(AC)$ e $d = \det(AC)$, nas expressões de (4.20), vem

$$t_1^2 - 4d = \frac{v}{r_1^2 r_2^2} (v r_1^2 + v r_2^2 + 2(v-2) r_1 r_2).$$

Como $v > 1$ para $m_2 > 0$ (condição não trivial), a última expressão é estritamente positiva para todos os parâmetros não nulos r_1, r_2 pelo que o lado direito em (4.21) é não negativo.

Se se verificar a condição (4.17), então $\gamma > \eta \frac{r_1+r_2}{2}$ e, uma vez que $v > 1$,

$$\gamma t_1 - \eta = \gamma v \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} - \eta > \gamma \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2} - \eta > \eta \left(\frac{(r_1 + r_2)^2}{2 r_1 r_2} - 1 \right) = \eta \frac{r_1^2 + r_2^2}{2 r_1 r_2} > 0.$$

Desta forma, $p_2^2 - 4p_0$ definido por (4.21) é positivo desde que (4.19) seja verdadeira. ■

Pode-se, finalmente estabelecer as condições para a estabilidade do pêndulo duplo invertido, ou seja, as condições para a estabilidade da matriz $\Lambda_{0,1}(D_\tau)$.

Teorema 4.5. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0, k_0 > 0$ tal que a posição de equilíbrio vertical $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ do pêndulo duplo invertido é estável se $0 < \delta < \delta_0, k > k_0$ e*

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > k^{-2} g \frac{v(r_1 + r_2) + \sqrt{v^2(r_1 + r_2)^2 - 4v r_1 r_2}}{2v} + \epsilon \quad (4.22)$$

e instável se $0 < \delta < \delta_0, k > k_0$ e

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau < k^{-2} g \frac{v(r_1 + r_2) + \sqrt{v^2(r_1 + r_2)^2 - 4v r_1 r_2}}{2v} - \epsilon. \quad (4.23)$$

Demonstração. Do Lema 4.3, $\Lambda_{0,1}(D_\tau) = \Lambda^{(1)} + \delta^2 R$ e verifica-se que

$$\det(\lambda I - (\Lambda^{(1)} + \delta^2 R)) = \det(\lambda I - \Lambda^{(1)}) + r(\lambda)$$

onde $r(\lambda) = \rho_2 \lambda^2 + \rho_0$, $\rho_2 = \mathcal{O}(\delta(\delta^2 + k^{-2}))$, $\rho_0 = \mathcal{O}(\delta(\delta^4 + k^{-4}))$, quando $\delta + k^{-1} \rightarrow 0$. O polinómio característico de $\Lambda_{0,1}(D_\tau)$ pode ser escrito como

$$\det(\lambda I - \Lambda_{0,1}(D_\tau)) = \lambda^4 + q_2 \lambda^2 + q_0 \quad (4.24)$$

e, sob a condição (4.22), está próximo do polinómio característico de $\Lambda^{(1)}$, $\lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_0$. Nomeadamente, $p_0 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ e $q_2 = p_2(1 + \mathcal{O}(\delta))$, $q_0 = p_0(1 + \mathcal{O}(\delta))$ quando $\delta \rightarrow 0$.

Suponha-se que a condição (4.22) se verifica. Então $p_0 > 0, p_2 > 0$ e $p_2^2 - 4p_0 > 0$. Obviamente, para δ_0 suficientemente pequeno, $\delta < \delta_0$ e k nas condições de (4.22), obtém-se $q_2 > 0, q_0 > 0$ e $q_2^2 - 4q_0 > 0$. Logo $\Lambda_{0,1}(D_\tau)$ é estável.

Se a condição (4.23) é verificada, então $p_0 < 0$ e para δ_0 suficientemente pequeno, tem-se $q_0 < 0$ e $\Lambda_{0,1}(D_\tau)$ é instável. ■

4.4 Pêndulo esférico

Nesta secção considera-se um pêndulo simples invertido sob as mesmas condições que as enunciadas na Secção 4.1 para o pêndulo duplo invertido. No entanto, agora, supõe-se que o movimento se desenrola no espaço tridimensional e estuda-se, novamente, a equação das pequenas oscilações.

4.4.1 Pêndulo esférico simples

Tal como antes, sejam, respectivamente m e r a massa e o comprimento do pêndulo. Seja θ o ângulo formado pelo pêndulo e a sua projecção no plano xOz . Denote-se por ϕ o ângulo formado por esta projecção e a parte positiva do eixo vertical z . O sistema tem dois graus de liberdade, são eles θ e ϕ . Os ângulos θ e ϕ são, na realidade, funções do tempo: $\theta = \theta(t)$ e $\phi = \phi(t)$. Denote-se $(\theta(\cdot), \phi(\cdot))$ por $q(\cdot)$.

Procedendo de forma análoga ao caso planar, um ponto de equilíbrio para o sistema é $q(t) = (0, 0)$. Numa vizinhança deste ponto de equilíbrio, o sistema de quatro equações diferenciais de primeira ordem obtido do Hamiltoniano linearizado é, na sua forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & (m r^2)^{-1} I_2 \\ m r I_2 [g + k^2 \ddot{s}(k t)] & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

ou, ainda,

$$\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} 0_2 & C \\ A g + \delta k^2 \ddot{s}(k t) A & 0_2 \end{pmatrix} z(t) = Q(t) z(t) \quad (4.25)$$

com $z(t) = (q, p)^T$, $A = m r I_2$ e $C = (m r^2)^{-1} I_2$.

O sistema (4.25) é análogo ao sistema (4.3), pelo que se pode aplicar a abordagem usada nas secções anteriores. Assim, e por analogia com a condição (4.19), a posição de equilíbrio $q(t) = (0, 0)$ do pêndulo esférico simples será estável sempre que

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > k^{-2} g \frac{\text{tr}(A C) + \sqrt{\text{tr}^2(A C) - 4 \det(A C)}}{2 \det(A C)} + \epsilon.$$

Tem-se $\text{tr}(A C) = 2 r^{-1}$ e $\det(A C) = r^{-2}$. Neste caso, a condição para a estabilidade é obtida numa forma simples.

Teorema 4.6. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$, $k_0 > 0$ tal que a posição vertical de equilíbrio $(\theta, \phi) = 0$ do pêndulo esférico simples é estável se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e*

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > k^{-2} g r + \epsilon$$

e instável se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau < k^{-2} g r - \epsilon.$$

4.4.2 Pêndulo esférico duplo

Considere-se um pêndulo duplo como o apresentado na Secção 4.1 descrevendo um movimento tridimensional. Sejam $\theta_i; i = 1, 2$ e $\phi_i; i = 1, 2$ os ângulos como descritos na Secção 4.4.1.

Agindo como nos dois casos precedentes, estuda-se a linearização do sistema Hamiltoniano numa vizinhança da posição de equilíbrio e obtém-se um sistema de oito equações diferenciais de primeira ordem nas variáveis $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2, p_{\theta_1}, p_{\theta_2}, p_{\phi_1}$ e p_{ϕ_2} . Denotando $q = (\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ e $p = \dot{q}$ o sistema tem a forma

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_4 & C \\ -B(t) & 0_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

onde $C = \text{diag } G$ e $B(t) = [g + \delta k^2 \ddot{s}(kt)] \text{diag } A$ sendo que

$$G = \frac{1}{m_1 m_2 r_1^2 r_2^2} \begin{pmatrix} r_2^2 & -m_2 r_1 r_2 \\ -m_2 r_1 r_2 & (m_1 + m_2) r_1^2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} (m_1 + m_2) r_1 & 0 \\ 0 & m_2 r_2 \end{pmatrix}.$$

Este sistema de oito equações pode ser re-escrito como dois sistemas desemparelhados de dimensão quatro, onde cada um dos sistemas tem estrutura análoga à do sistema (4.2)

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p}_{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & G \\ g A + \delta k^2 \ddot{s}(kt) A & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ p_{\theta} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{p}_{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_2 & G \\ g A + \delta k^2 \ddot{s}(kt) A & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ p_{\phi} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

A forma desemparelhada (4.26)-(4.27) do pêndulo duplo invertido mostra que o estudo da sua estabilidade pode ser realizado analisando independentemente as suas projecções no plano xOy (sistema nas variáveis $\phi_i; i = 1, 2$) e no plano yOz (sistema nas variáveis $\theta_i; i = 1, 2$). Assim, as condições para a estabilidade do pêndulo duplo esférico (invertido) coincidem com as apresentadas no Teorema 4.5 para o pêndulo invertido planar.

Teorema 4.7. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0, k_0 > 0$ tal que a posição de equilíbrio vertical $(\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2) = (0, 0, 0, 0)$ do pêndulo esférico duplo invertido é estável se $0 < \delta < \delta_0, k > k_0$ e*

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau > k^{-2} g \frac{v(r_1 + r_2) + \sqrt{v^2(r_1 + r_2)^2 - 4v r_1 r_2}}{2v} + \epsilon$$

e instável se $0 < \delta < \delta_0, k > k_0$ e

$$\delta^2 \int_0^1 \dot{s}^2(\tau) d\tau < k^{-2} g \frac{v(r_1 + r_2) + \sqrt{v^2(r_1 + r_2)^2 - 4v r_1 r_2}}{2v} - \epsilon,$$

onde $v = (m_1 + m_2)/m_1$.

Capítulo 5

Equação da onda

Nos capítulos anteriores o estudo referiu-se sempre a sistemas mecânicos descritos por equações diferenciais ordinárias. O presente capítulo, por seu turno, terá como objecto de estudo um caso particular das equações às derivadas parciais: a equação da onda. A passagem de um tópico para o outro exige a adequação da terminologia a usar. Por isso, este capítulo inicia-se com a definição dos espaços e normas mais adequadas ao trabalho que se pretende desenvolver.

Neste capítulo o sistema em consideração é o de uma corda (finita) sujeita a uma perturbação linear. Pretende-se estabelecer condições para a estabilidade/estabilização assintótica do sistema por aplicação de uma oscilação rápida arbitrária.

As noções e factos principais da teoria das equações às derivadas parciais usadas neste capítulo seguem essencialmente a monografia [Lad85].

Parte do trabalho considerado neste capítulo foi apresentado na conferência internacional “PhysCon05” da qual resultou a publicação [CS05a].

5.1 Os espaços e as normas

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e $L_2(\Omega)$ o espaço das funções definidas em Ω mensuráveis no sentido de Lebesgue tendo norma finita

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{1/2}.$$

O produto interno em $L_2(\Omega)$ denota-se por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. O conjunto dos elementos de $L_2(\Omega)$ que possuem derivada generalizada até à ordem m também em $L_2(\Omega)$ denota-se por $W_2^m(\Omega)$. Este conjunto é um espaço de Hilbert, isto é, um espaço completo para a norma induzida pelo produto interno aí definido. A norma em $W_2^m(\Omega)$ denota-se por $\|\cdot\|_m$.

O sub-espaço de $W_2^1(\Omega)$ que coincide com a aderência do conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω representa-se por $\mathring{W}_2^1(\Omega)$. Aqui o produto interno é dado por

$$\langle u, v \rangle_1 = \int_{\Omega} uv + u_x v_x dx$$

e a norma $\|u\|_1 = \langle u, u \rangle_1^{1/2}$.

Observação 5.1. *Essencialmente, trabalhar na aderência do conjunto das funções C^∞ de suporte compacto contido em Ω , isto é em $\mathring{W}_m^l(\Omega)$, tem a vantagem de disponibilizar algumas*

estimativas e relações importantes. Por exemplo, a igualdade

$$\int_{\Omega} \text{grad } f \cdot \text{grad } g = - \int_{\Omega} (\nabla^2 f) g \quad (5.1)$$

só é válida em $\dot{W}_m^l(\Omega)$. De facto, fazendo o cálculo para f e g em C^1 , verifica-se que é necessária a nulidade de f e g na fronteira de Ω para que a igualdade se verifique. Por outro lado, sejam f e g elementos de $\dot{W}_m^l(\Omega)$ e f_n e g_n duas sucessões de elementos de C^∞ com suporte compacto contido em Ω e que convergem para f e g , respectivamente. As sucessões f_n e g_n verificam (5.1), já que o seu suporte está num compacto contido em Ω . Passando ao limite, conclui-se que (5.1) é válida para f e g .

Uma implicação prática de se trabalhar em $\dot{W}_m^l(\Omega)$ é de se trabalhar com funções nulas na fronteira pelo que sempre que se usa integração por partes não existem termos de fronteira. De facto, a fronteira de um aberto “regular” tem medida (de Lebesgue) nula. Logo, para elementos de $L_p(\Omega)$ não faz sentido em falar de “nulidade sobre a fronteira” uma vez que, por definição, se pode alterar o seu valor em conjuntos de medida nula.

Para ultrapassar este tipo de dificuldade, trabalha-se na aderência das funções C^∞ com suporte compacto contido em Ω . Para estas, como são de classe C^∞ , faz sentido falar do valor na fronteira, que aliás é nulo.

Pode-se, no entanto, estender o conceito de “valor sobre a fronteira” para elementos de $L_p(\Omega)$. Este resultado, bastante técnico, é vulgarmente designado por Teorema do Traço [AF03].

5.2 O problema

Considere-se um sistema elástico descrito por uma equação diferencial parcial hiperbólica. Em particular, considere-se a equação da corda elástica

$$u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx}, \quad x \in \Omega \quad (5.2)$$

onde u_ξ denota a derivada parcial de u em ordem à variável ξ . Tome-se $\Omega = [0, 2\pi]$ e fixem-se as condições de fronteira

$$u(x, \tau) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (5.3)$$

Introduzindo em (5.2) uma perturbação $\gamma^2 u$ a equação toma a forma

$$u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx} + \gamma^2 u. \quad (5.4)$$

A solução identicamente nula desta equação é instável sempre que $\gamma^2 > a^2/4$. Na presença de atrito, a equação (5.4) será

$$u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx} - \alpha u_\tau + \gamma^2 u, \quad x \in \Omega \quad (5.5)$$

onde $\alpha > 0$ é o coeficiente de atrito.

Pretende-se estabilizar/estabilizar assintoticamente a equação (5.4)/(5.5) através de um controlo de *feedback*¹ não autónomo

$$h(u, k\tau) = \delta k^2 g(k\tau) u. \quad (5.6)$$

¹Alguns autores portugueses utilizam a designação de *controlo realimentado*.

As equações “controladas” são, respectivamente,

$$u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx} + \gamma^2 u + h(u, k\tau) \quad (5.7)$$

e

$$u_{\tau\tau} = a^2 u_{xx} - \alpha u_\tau + \gamma^2 u + h(u, k\tau). \quad (5.8)$$

A função g é limitada, contínua e periódica de período 1, $\delta > 0$ é um parâmetro pequeno enquanto $k \geq 1$ pode ser escolhido arbitrariamente grande. Para g assume-se

Hipótese 1. $\int_0^1 g(\xi) d\xi = 0$,

Hipótese 2. definindo $G(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi$, tem-se

$$\int_0^1 G(\xi) d\xi = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \xi g(\xi) d\xi = 0.$$

Sob estas condições, a medianização dos termos vibrantes é nula pelo que a medianização das equações (5.7) e (5.8) coincide com as equações (5.4) e (5.5), respectivamente. Desta forma, as medianizações são instáveis.

Para uma condição inicial dada

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_\tau(x, 0) = \psi(x), \quad (5.9)$$

onde $\varphi \in W_2^2(\Omega) \cap \dot{W}(\Omega)$ e $\psi \in \dot{W}(\Omega)$, a solução (clássica) para os problemas de valor na fronteira (5.7), (5.3) e (5.8), (5.3) existe e é única em $W_2^2(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$, [Lad85]. Por *solução clássica* entende-se um elemento do espaço $W_2^2(\Omega)$ que satisfaça a equação para todo o t e para quase todo o $x \in \Omega$.

A noção de estabilidade assintótica considerada neste trabalho é mais forte que o conceito usual. De facto, quando aqui é referida a estabilidade assintótica, está-se a tomar em consideração a estabilidade assintótica de forma exponencial. Precisem-se os conceitos de estabilidade e estabilidade exponencial para equações às derivadas parciais.

Definição 5.1 (Estabilidade). *A solução nula $\tilde{u}(x, t) \equiv 0$ de (5.7), (5.3) é estável se, para todo o $\eta > 0$, existe $0 < \xi < \eta$ tal que, para toda a solução $u(x, t)$ com $\|u(x, 0)\|_1^2 + \|u_t(x, 0)\|^2 < \xi$*

$$\|u(x, t)\|_1^2 + \|u_t(x, t)\|^2 < \eta$$

para todo o $t \geq 0$.

Definição 5.2 (Estabilidade exponencial). *A solução nula $\tilde{u}(x, t) \equiv 0$ de (5.8), (5.3) é exponencialmente estável se existe $0 < \xi < \eta$ tal que, para toda a solução $u(x, t)$ com $\|u(x, 0)\|_1^2 + \|u_t(x, 0)\|^2 < \xi$, existem $\sigma, C > 0$ tais que*

$$\|u(\cdot, t)\|_1^2 + \|u_t(\cdot, t)\|^2 \leq C e^{-\sigma t} (\|u(x, 0)\|_1^2 + \|u_t(x, 0)\|^2),$$

para todo o $t \geq 0$.

Considere-se a mudança de variável $t = k\tau$. A equação (5.7) na nova variável é

$$\begin{aligned} u_{tt} &= k^{-2} a^2 u_{xx} + k^{-2} \gamma^2 u + k^{-2} h(u, t) \\ u(0, t) &= u(2\pi, t) = 0, \end{aligned} \quad (5.10)$$

enquanto a equação amortecida vem

$$\begin{aligned} u_{tt} &= k^{-2} a^2 u_{xx} - k^{-1} \alpha u_t + k^{-2} \gamma^2 u + k^{-2} h(u, t), \\ u(0, t) &= u(2\pi, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.11)$$

As condições iniciais (5.9) na variável t são

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = k^{-1} \psi(x). \quad (5.12)$$

5.3 Estabilização na presença de atrito

Considere-se o problema da estabilização assintótica da solução nula do problema (5.11) recorrendo a um controlo *state feedback*

$$h(u, t) = \delta k^2 g(t) u.$$

Isto é, estude-se a estabilidade assintótica da solução nula da equação

$$\begin{aligned} u_{tt} &= k^{-2} a^2 u_{xx} - k^{-1} \alpha u_t + [k^{-2} \gamma^2 + \delta g(t)] u, \\ u(0, t) &= u(2\pi, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Seguindo o método clássico de Fourier, procure-se uma solução u do problema (5.13) que seja o produto de duas funções, onde cada uma depende de uma única variável, isto é,

$$u(x, t) = T(t) X(x).$$

No que se segue, usa-se *ponto* e *linha*, respectivamente, para denotar a derivada das funções em ordem a t e a x . Substituindo u e as suas derivadas na equação às derivadas parciais obtém-se, para $X \neq 0$, $T \neq 0$,

$$\frac{\ddot{T} + k^{-1} \alpha \dot{T} + b(t) T}{k^{-2} a^2 T} = \frac{X''}{X} \quad (5.14)$$

onde

$$b(t) = -[k^{-2} \gamma^2 + \delta g(t)]. \quad (5.15)$$

Da igualdade (5.14) torna-se claro que os quocientes envolvidos devem ser constantes; seja $\lambda \in \mathbb{R}$ o valor dessa constante. Assim, $X'' = \lambda X$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e

$$\ddot{T} + k^{-1} \alpha \dot{T} + [b(t) - \lambda k^{-2} a^2] T = 0. \quad (5.16)$$

O problema

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = X(2\pi) = 0, \quad (5.17)$$

é um problema espectral para o operador elíptico¹

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

¹Este é também um (simples) problema de condições na fronteira para uma equação diferencial ordinária de ordem 2

com condições de fronteira obtidas das originais em (5.13). Conclui-se que, em (5.17), $\lambda_n = -\mu_n^2 = -\frac{n^2}{4}$ e $\tilde{\phi}_n(x) = \sin(\mu_n x)$, $n = 1, 2, \dots$ são os valores próprios e as funções próprias do operador elíptico. No lugar de $\tilde{\phi}_n(x)$ tome-se

$$\phi_n(x) = \pi^{-1/2} \tilde{\phi}_n(x) \quad (5.18)$$

para que o conjunto das funções $\{\phi_n(x)\}$ forme uma base ortonormada de $L_2(\Omega)$.

Denote-se por T_n a solução da equação diferencial ordinária (5.16) com λ substituído por $\lambda_n = -\mu_n^2$. A série

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \phi_n(x) \quad (5.19)$$

satisfaz, formalmente, o problema (5.13). Para uma condição inicial fixada (5.12), obtém-se

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \phi_n(x), \quad \text{e} \quad \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k \dot{T}_n(0) \phi_n(x).$$

Como $\{\phi_n\}$ é uma base ortonormada em $L_2(\Omega)$, tem-se

$$T_n(0) = \langle \varphi, \phi_n \rangle \quad \text{e} \quad \dot{T}_n(0) = k^{-1} \langle \psi, \phi_n \rangle. \quad (5.20)$$

Assim, se $T_n(0)$ e $\dot{T}_n(0)$ são definidas por (5.20), então a série (5.19) satisfaz formalmente o problema (5.13) para uma dada condição inicial.

Substituindo u , definida por (5.19), na equação às derivadas parciais (5.13) e igualando os termos com igual argumento na função sin obtém-se um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem

$$\ddot{T}_n(t) + k^{-1} \alpha \dot{T}_n(t) + [b(t) + \mu_n^2 k^{-2} a^2] T_n(t) = 0, \quad (5.21)$$

para $n = 1, 2, \dots$. Formalmente, o problema de condições na fronteira (5.13) é equivalente ao sistema de equações diferenciais ordinárias de dimensão infinita (5.21).

Estabilização assintótica de uma equação

Tomando a medianização dos coeficientes da equação (5.21), da Hipótese 1 da Secção 5.2, segue que a medianização de $b(t)$, definido em (5.15), é $\int_0^1 b(t) dt = -k^{-2} \gamma^2$ obtendo-se a equação medianizada

$$\ddot{T}_n(t) + k^{-1} \alpha \dot{T}_n(t) + k^{-2} (\mu_n^2 a^2 - \gamma^2) T_n(t) = 0. \quad (5.22)$$

Se a perturbação linear $\gamma^2 u$ for suficientemente grande, isto é, $\gamma^2 > a^2 \mu_n^2$, então a equação medianizada (5.22) é instável. No que se segue, prova-se que, mesmo nesta situação, é possível obter estabilidade assintótica escolhendo a frequência da oscilação (não harmónica) (5.6) suficientemente grande. Por frequência da oscilação não harmónica entende-se a constante k presente no argumento da função g (cf. (5.6)).

Para obter uma condição para a estabilidade assintótica de uma (única) equação em (5.21) comece-se por transformar tal equação num sistema bidimensional de equações lineares primeira ordem introduzindo uma nova variável $S_n = k \dot{T}_n$. Sendo $z_n^T = (T_n, S_n)$ vem

$$\dot{z}_n(t) = A_n(t) z_n(t) \quad (5.23)$$

onde

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k^{-1}(\gamma^2 - \mu_n^2 a^2) + k \delta g(t) & -k^{-1} \alpha \end{pmatrix}.$$

Para cada n , o sistema (5.23) é semelhante ao sistema (4.3) apresentado na Secção 4.1. Pode-se, então, aplicar a abordagem utilizada no Capítulo 4 para o estudo da estabilidade assintótica deste sistema.

Escreva-se $A_n(t)$ como $B_n(t) + C_n$, onde

$$B_n(t) = \delta k g(t) B, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_n = k^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2 - a^2 \mu_n^2 & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Da fórmula da variação das constantes do cálculo cronológico (2.27), a matriz de monodromia do sistema (5.23) admite a representação

$$\begin{aligned} P_n^1 &= \overleftarrow{\exp} \int_0^1 A_n(\xi) d\xi = \overleftarrow{\exp} \int_0^1 [B_n(\xi) + C_n] d\xi \\ &= \overleftarrow{\exp} \int_0^1 B_n(\tau) d\tau \circ \overleftarrow{\exp} \int_0^1 \left(\overrightarrow{\exp} \int_0^\tau -\text{ad } B_n(\theta) d\theta C_n \right) d\tau. \end{aligned}$$

Da Hipótese 1, vem $\int_0^1 B_n(\tau) d\tau = \mathbf{0}_2$ donde

$$\overleftarrow{\exp} \int_0^1 B_n(\tau) d\tau = \mathbf{I}_2,$$

sendo $\mathbf{0}_2$ e \mathbf{I}_2 as matrizes nula e identidade de dimensão dois, respectivamente. Além disso,

$$\left(\overrightarrow{\exp} \int_0^t -\text{ad } B_n(\theta) d\theta \right) C_n = e^{-\delta k G(t) \text{ad } B} C_n$$

onde $\int_0^t g(\theta) d\theta = G(t)$ (cf. Hipótese 2). A matriz de monodromia do sistema é, então,

$$P_n^1 = \overleftarrow{\exp} \int_0^1 D_n(t) dt,$$

com

$$\begin{aligned} D_n(t) &= e^{-\delta k G(t) \text{ad } B} C_n \\ &= \left[\mathbf{I}_2 - \delta k G(t) \text{ad } B + \frac{(\delta k)^2}{2} G^2(t) \text{ad}^2 B - \frac{(\delta k)^3}{3!} G(t) \text{ad}^3 B + \dots \right] C_n. \end{aligned}$$

Uma vez que $\text{ad}^j B C_n = \mathbf{0}_2$, $j \geq 3$, os termos aos quais correspondem as reticências no segundo membro da igualdade anterior são nulos, pelo que a série correspondente a $e^{-\delta k G(t) \text{ad } B} C_n$ termina no termo de terceira ordem e

$$D_n(t) = \begin{pmatrix} \delta G(t) & k^{-1} \\ k^{-1}(\gamma^2 - a^2 \mu_n^2) - \tilde{G}(t) & -k^{-1} \alpha - \delta G(t) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

sendo $\tilde{G}(t) = \alpha \delta G(t) + k \delta^2 G^2(t)$.

Seja

$$\Lambda = \ln P_n^1 = \ln \left(\overleftarrow{\exp} \int_0^1 D_n(t) dt \right)$$

o logaritmo da matriz de monodromia.

Considere-se a expansão (2.38) para o logaritmo, com $\Lambda^{(m)}$ definida por (2.42). Mostre-se que, sob certas condições, as propriedades da estabilidade da equação (5.23) são determinadas por $\Lambda^{(1)}$.

Como foi visto na Secção 4.1, o primeiro termo $\Lambda^{(1)}$ coincide com a medianização da matriz $D_n(t)$. De acordo com a Hipótese 2

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k^{-1}(\gamma^2 - a^2 \mu_n^2) - \delta^2 k \Gamma & -k^{-1} \alpha \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

onde $\Gamma = \int_0^1 G^2(t) dt > 0$. Os valores próprios de $\Lambda^{(1)}$ podem ser reais ou complexos (conjugados); são iguais a

$$\xi_i^{(1)} = \frac{\Theta \pm \sqrt{\Theta^2 - 4\Delta}}{2} \quad (5.26)$$

onde $\Theta = -k^{-1} \alpha$ e $\Delta = \delta^2 \Gamma - k^{-2}(\gamma^2 - a^2 \mu_n^2)$ são o traço e o determinante de $\Lambda^{(1)}$, respectivamente. Tem-se $\Theta < 0$. A matriz $\Lambda^{(1)}$ tem valores próprios reais negativos se

$$k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2 n^2}{4} < \delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt \leq k^{-2} \frac{\alpha^2 + 4\gamma^2 - a^2 n^2}{4}. \quad (5.27)$$

Para n grande a desigualdade anterior nunca é satisfeita, mas para

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt > k^{-2} \frac{\alpha^2 + 4\gamma^2 - a^2 n^2}{4} \quad (5.28)$$

obtém-se um par de números complexos conjugados com parte real negativa.

Observação 5.2. Da equação (5.26), é óbvio que o grau de estabilidade assintótica aumente com α . Um fenómeno interessante, mas não surpreendente, ocorre quando $\Theta^2 - 4\Delta$ se anula: valores próprios negativos bifurcam num par de valores próprios complexos conjugados.

Para o termo resto $\Lambda - \Lambda^{(1)}$ é válida a seguinte estimativa seguinte, análoga à apresentada no Lema 4.3.

Lema 5.1. Para $n^2 < 4 \frac{k^2 + \gamma^2}{a^2}$ existe uma constante positiva c e uma matriz R , 2×2 , tais que

$$\Lambda - \Lambda^{(1)} = \delta^2 R, \quad \|R\|_M < c \quad (5.29)$$

onde nem c nem R dependem de n .

Como habitual, $\|\cdot\|_M$ denota uma qualquer norma matricial. O limite superior para n imposto no lema anterior é irrelevante: supõe-se que tal limite pode ser atingido para $k > k_0$ como estabelecido na proposição que se segue. De (5.27), (5.28) e (5.29), obtém-se a condição para a estabilidade assintótica do sistema bidimensional (5.23).

Proposição 5.2. Para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta_0 > 0$, $k_0 > 1$ tais que a solução identicamente nula $z_n(t) \equiv 0$ do sistema (5.23) é exponencialmente estável se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt > k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2 n^2}{4} + \epsilon, \quad (5.30)$$

e instável se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt < k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2 n^2}{4} - \epsilon. \quad (5.31)$$

Note-se que se a condição (5.30) for satisfeita para $n = N$ então é satisfeita para todo $n \geq N$.

Recorde-se que o sistema (5.22) corresponde a uma só equação. No entanto, o problema (5.13) é formalmente equivalente a um sistema de dimensão infinita de equações onde cada equação é da forma de (5.22). A estratégia que se propõe para provar a estabilidade assintótica de (5.13) consiste em obter condições para a estabilidade assintótica da N -ésima aproximação de Galerkin de (5.13) e, posteriormente, estudar a “cauda” associada a tal aproximação.

Estabilização da aproximação de Galerkin

A N -ésima aproximação de Galerkin para o problema (5.13) é o sistema formado pelas N primeiras equações de (5.21). Por estas equações serem desemparelhadas, o sistema é equivalente a $2N$ sistemas diagonais por blocos, sendo que, cada um dos blocos é da forma de (5.23). Desta forma, a *aproximação de Galerkin* é o sistema de dimensão $2N$

$$\dot{z}_N(t) = H_N(t) z_N(t) \quad (5.32)$$

onde $z_N^T(t) = (\tilde{z}_1(t), \dots, \tilde{z}_N(t))$ e $H_N(t) = \text{diag}\{D_1(t), \dots, D_N(t)\}$. O sistema anterior é assintoticamente estável sempre que cada um dos sistemas

$$\dot{z}_n(t) = D_n(t) z_n(t), \quad n = 1, \dots, N,$$

o for; é instável se, pelo menos, um dos sistemas o for. A instabilidade ocorre se (5.31) se verificar para algum $n = n_1 \leq N$ (então vale para todo o $n \leq n_1$). De acordo com a Proposição 5.2 o sistema (5.32) é exponencialmente estável se

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt > k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2}{4} + \epsilon.$$

Note-se que condição anterior não depende de N .

Seja \mathcal{G}_N o sub-espço de $L_2(\Omega)$ gerado pelo conjunto $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^N$ com ϕ_n definida em (5.18) e seja \mathcal{G}_N^\perp o complemento ortogonal de \mathcal{G}_N em $L_2(\Omega)$. Denote-se por u_N a projecção da única solução do problema (5.13) em \mathcal{G}_N e por u_N^\perp a projecção de u em \mathcal{G}_N^\perp . Então

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \langle u, \phi_n \rangle \phi_n(x) = \sum_{n=1}^N T_n(t) \phi_n(x)$$

é a solução da N -ésima aproximação de Galerkin para o problema (5.13) e vale a seguinte proposição.

Proposição 5.3. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$, $k_0 > 0$ tal que se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e*

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt > k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2}{4} + \epsilon \quad (5.33)$$

então a solução nula $z_n(t) \equiv 0$ da aproximação de Galerkin do problema (5.13) é exponencialmente estável.

Por conseguinte, se a desigualdade (5.33) for válida tem-se que

$$\|u_N(\cdot, t)\|_1^2 + \|(u_N)_t(\cdot, t)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Para estabelecer a estabilidade assintótica do problema (5.8), (5.3) há que provar que, para N suficientemente grande, a norma da projecção de u em \mathcal{G}_N^\perp tende para zero quando $t \rightarrow +\infty$, isto é,

$$\|u^N(\cdot, t)\|_1^2 + \|u_t^N(\cdot, t)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty.$$

Convergência da projecção de u em \mathcal{G}_N^\perp

Note-se que, para todo o elemento u de $W_2^2(Q_T)$, onde $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $u^N(\cdot, t)$ está em $W_2^2(\Omega)$ para todo o $t \in (0, T)$. Prove-se agora que

Proposição 5.4. *Para a projecção u^N existe $c > 0$ tal que, para todo o $t \geq 0$*

$$\|u^N(\cdot, t)\|_1^2 + \|u_t^N(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-ct} (\|u^N(\cdot, 0)\|_1^2 + \|u_t^N(\cdot, 0)\|^2).$$

Demonstração. Introduza-se a função V definida, para todo o $u \in W_2^2(Q_T)$, por

$$V = \frac{k^{-2}\alpha^2}{4} \|u\|^2 + \frac{k^{-2}a^2}{2} \|u_x\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{k^{-1}\alpha}{2} \langle u, u_t \rangle \quad (5.34)$$

onde, mais uma vez, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\|\cdot\|$ representam, respectivamente, o produto interno e a norma em $L_2(\Omega)$. Denote-se a restrição da função V a \mathcal{G}_N^\perp por V^N .

Comece-se por notar que existe uma constante positiva C_1 tal que

$$V^N \geq C_1 (\|u^N\|_1^2 + \|u_t^N\|^2). \quad (5.35)$$

De facto, V pode ser representada como

$$V = \frac{k^{-2}a^2}{2} \|u_x\|^2 + \frac{1}{4} \|u_t\|^2 + \frac{1}{4} \|k^{-1}\alpha u + u_t\|^2.$$

Enquanto a desigualdade $\|u_x^N\|^2 \geq N^2 \|u^N\|^2$ for válida, tem-se

$$V^N \geq \frac{k^{-2}a^2}{4} N^2 \|u^N\|^2 + \frac{k^{-2}a^2}{4} \|u_x^N\|^2 + \frac{1}{4} \|u_t^N\|^2 + \frac{1}{4} \|k^{-1}\alpha u^N + u_t^N\|^2$$

a desigualdade (5.35) é válida com $C_1 = C_1(k) = \min\left(\frac{k^{-2}a^2}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Seja, agora, \dot{V}^N a derivada em ordem ao tempo de $V^N(u^N(\cdot, t))$. Cálculos simples mostram que

$$-\dot{V}^N \geq C_2(N, k, t) \|u^N\|^2 + \frac{k^{-3}\alpha}{4} a^2 \|u_x^N\|^2 + \frac{k^{-1}\alpha}{4} \|u_t^N\|^2$$

onde

$$C_2(N, k, t) = \frac{k^{-3}\alpha}{4} a^2 N^2 - \left[\frac{k^{-1}\alpha}{2} b(t) + \frac{1}{k^{-1}\alpha} b^2(t) \right].$$

Uma vez que g e b são funções periódicas e limitadas, existe uma constante $\beta > 0$ tal que $|b(t)| \leq \beta$ para todo o $t \geq 0$, (cf. (5.15)). Então, para todo o $t \geq 0$

$$C_2(N, k, t) \geq \hat{C}_2(N, k) = \frac{k^{-3}\alpha}{4} a^2 N^2 - \left[\frac{k^{-1}\alpha}{2} \beta + \frac{\beta^2}{k^{-1}\alpha} \right].$$

Suponha-se N suficientemente grande para garantir $\hat{C}_2(N, k) > 0$ (para todo o $\delta < \delta_0$, $k > k_0$). Então, para tal N , \hat{C}_2 pode ser escolhido independente de N

$$-\dot{V}^N \geq \hat{C}_2(N, k) \|u^N\|^2 + \frac{k^{-3}\alpha}{4} a^2 \|u_x^N\|^2 + \frac{k^{-1}\alpha}{4} \|u_t^N\| > 0.$$

Verifica-se também que

$$V^N \leq \frac{3}{8} k^{-2} \alpha^2 \|u^N\|^2 + \frac{k^{-2}}{2} a^2 \|u_x^N\|^2 + \|u_t^N\|.$$

Desta forma, existe uma constante positiva $C(k)$ tal que $\dot{V}^N \leq -C(k) V^N$, logo

$$V^N(t) \leq V^N(0) e^{-C(k)t}. \quad (5.36)$$

De (5.35) e de (5.36) conclui-se que

$$\|u^N(\cdot, t)\|_1^2 + \|u_t^N(\cdot, t)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow +\infty. \quad \blacksquare$$

As Proposições 5.3 e 5.4 permitem concluir a estabilidade assintótica da solução nula do sistema de dimensão infinita (5.32) e a consequente estabilidade assintótica da solução nula do problema (5.8), (5.3).

Teorema 5.5. *Considere-se o problema (5.8), (5.3) para a corda sujeita a uma perturbação linear e sob acção de um controlo não autónomo output feedback (rapidamente forçado e não harmónico) (5.38) na presença de atrito.*

Nestas condições, para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta_0 > 0$, $k_0 > 0$ tais que se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e a desigualdade (5.33) é válida, então a solução nula $u(x, t) \equiv 0$ do problema (5.8), (5.3) é exponencialmente estável.

Se (5.31) é válida para algum $n = n_1 \leq N$, então a aproximação de dimensão finita (5.32) é instável conduzindo à instabilidade da solução nula do problema (5.8), (5.3).

5.4 Estabilização na ausência de atrito

Considere-se, agora, o problema da estabilização da solução nula da equação não amortecida (5.4). Neste caso, procura-se estabilizar o sistema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= k^{-2} a^2 u_{xx} + k^{-2} \gamma^2 u + k^{-2} h(u, t) \\ u(0, t) &= u(2\pi, t) = 0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

A escolha para o controlo recai sobre um *output feedback* não autónomo, [Cor99],

$$h(u, t) = \delta k^2 g(k\tau) \Pi_N u, \quad (5.38)$$

(cf. (5.6)). Aqui Π_N representa a projecção ortogonal do estado u no sub-espaço de $L_2(\Omega)$ gerado pelas N -primeiras harmónicas, \mathcal{G}_N .

Para o controlo h definido por (5.38), a equação em (5.37) é formalmente equivalente a um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem de duas formas distintas

$$\begin{aligned} \ddot{T}_n(t) + [k^{-2}(\mu_n^2 a^2 - \gamma^2) - \delta g(t)] T_n(t) &= 0, & n \leq N \\ \ddot{T}_n(t) + k^{-2}(\mu_n^2 a^2 - \gamma^2) T_n(t) &= 0, & n > N. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Esta equivalência é deduzida da expansão formal (5.19) para u .

A análise da estabilidade de u_N segue o que foi feito na secção anterior. Tal como antes, introduza-se uma nova variável $S_n = k \dot{T}_n$ e reduza-se a equação (5.39) a um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\dot{z}_n(t) = \tilde{A}_n(t) z_n(t), \quad n \leq N \quad (5.40)$$

onde

$$\tilde{A}_n(t) = \begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k^{-1}(\gamma^2 - \mu_n^2 a^2) + k \delta g(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Aplicando a fórmula da variação das constantes (2.27), calcula-se a matriz de monodromia para (5.40)

$$Q_n^1 = \overrightarrow{\exp} \int_0^1 \tilde{D}_n(t) dt,$$

onde

$$\tilde{D}_n(t) = \begin{pmatrix} \delta G(t) & k^{-1} \\ k^{-1}(\gamma^2 - a^2 \mu_n^2) - k \delta^2 G^2(t) & -\delta G(t) \end{pmatrix}$$

e $G(t) = \int_0^t g(\xi) d\xi$. Considera-se, em seguida, o logaritmo $\Lambda = \ln Q_n^1$ dado pela expansão assintótica (2.38) e calcula-se $\Lambda^{(1)}$

$$\Lambda^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & k^{-1} \\ k^{-1}(\gamma^2 - a^2 \mu_n^2) - \delta^2 k \Gamma & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\Gamma = \int_0^1 G^2(t) dt > 0$.

A este ponto é claro que a maior diferença entre os problemas da corda com atrito e sem atrito é o facto de, no último, a matriz $\Lambda^{(1)}$ ser uma matriz de traço nulo enquanto (5.25) tem traço negativo. Assim, para obter condições para a estabilidade há que garantir que os valores próprios de $\Lambda^{(1)}$ sejam dois números imaginários (conjugados). A condição de estabilidade para cada um dos sistemas (5.40) é análoga à Proposição 5.2.

Proposição 5.6. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta_0 > 0$, $k_0 > 1$ tal que a solução nula $z_n(t) \equiv 0$ de (5.40) é estável se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e*

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt > k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2 n^2}{4} + \epsilon$$

e instável se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt < k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2 n^2}{4} - \epsilon.$$

Recorde-se que a aproximação de Galerkin para a equação em (5.37) é um sistema N -dimensional de equações de segunda ordem da forma de (5.40) para $n = 1, \dots, N$. Tal como na Secção 5.3, este sistema é estável sempre que todas as equações forem estáveis, isto é, quando a Proposição 5.6 for verdadeira para todo o $n \leq N$.

Para concluir sobre a estabilidade da solução nula de (5.37),(5.3) há que analisar a estabilidade da projecção de (5.37) em \mathcal{G}_N^\perp , isto é, analisar a estabilidade de

$$u_{tt}^N = k^{-2} a^2 u_{xx}^N + k^{-2} \gamma^2 u^N.$$

Considere-se, a função (cf. (5.34))

$$V = -k^{-2} \frac{\gamma^2}{2} \|u\|^2 + k^{-2} \frac{a^2}{2} \|u_x\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t\|^2.$$

Embora a função V não seja definida positiva, a sua projecção V^N em \mathcal{G}_N^\perp é definida positiva desde que N seja suficientemente grande: $N^2 > \gamma^2/a^2$. De facto, uma vez que a desigualdade $\|u_x^N\|^2 \geq N^2 \|u^N\|^2$ é válida, tem-se

$$V^N \geq \frac{k^{-2}}{2} [a^2 N^2 - \gamma^2] \|u^N\|^2 + \frac{1}{2} \|u_t^N\|^2 \geq 0.$$

Seja $\dot{V}^N = 0$ a derivada de $V^N(u^N(\cdot, t))$ em ordem a t . Então

$$\begin{aligned} \dot{V}^N &= -k^{-2} \gamma^2 \langle u^N, u_t^N \rangle + k^{-2} a^2 \langle u_x^N, u_{xt}^N \rangle + \langle u_t^N, u_{tt}^N \rangle \\ &= -k^{-2} \gamma^2 \langle u^N, u_t^N \rangle - k^{-2} a^2 \langle u_{xx}^N, u_t^N \rangle + k^{-2} a^2 \langle u_t^N, u_{xx}^N \rangle + \\ &\quad + k^{-2} \gamma^2 \langle u_t^N, u^N \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

A igualdade $\langle u_x^N, u_{xt}^N \rangle = -\langle u_{xx}^N, u_t^N \rangle$, válida sob as condições de fronteira (5.3), é obtida por integração por partes em x .

Assim, $V^N(u^N(\cdot, t)) \equiv \text{const}$ donde se obtém um limite superior para $\|u^N\|$ e se conclui a estabilidade da solução nula da projecção do problema (5.37) em \mathcal{G}_N^\perp . Daqui e da Proposição 5.6 a condição para a estabilidade da solução nula de (5.37),(5.3) é imediata.

Teorema 5.7. *Considerem-se o problema (5.7),(5.3) para a corda não amortecida sujeita a uma perturbação linear e sob acção de um controlo linear não autónomo output feedback (rapidamente forçado e não harmónico) (5.38). Então, para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta_0 > 0$, $k_0 > 0$ tais que se $0 < \delta < \delta_0$, $k > k_0$ e a desigualdade*

$$\delta^2 \int_0^1 G^2(t) dt > k^{-2} \frac{4\gamma^2 - a^2}{4} + \epsilon$$

é válida, então a solução nula problema (5.7),(5.3) é estável.

Note-se que a condição de estabilidade para (5.7),(5.3) coincide com a condição para a estabilidade assintótica de (5.8),(5.3). O que não é surpreendente uma vez que $\det \Lambda^{(1)}$ desempenha um papel fulcral no processo de obtenção da condição de estabilidade. Ora $\det \Lambda^{(1)}$ coincide nas duas situações.

5.5 Comentário

Ao terminar este capítulo impõe-se um comentário relativamente ao trabalho de Yu.S. Kolesov [Kol03].

A abordagem ao problema da estabilidade/ estabilização de uma corda apresentada neste trabalho é mais geral que a apresentada em [Kol03]. Com efeito, no presente trabalho não se considera nenhum tipo particular de controlo vibrante, contrariamente às vibrações harmónicas e a algumas hipóteses restritivas impostas nas frequências que aparecem no referido trabalho.

Capítulo 6

Pêndulo num kart

Recorrendo a técnicas e ferramentas disponibilizadas pela *Teoria Geométrica do Controlo*, nomeadamente ao teorema de Herman-Nagano na sua versão analítica, no presente capítulo prova-se a controlabilidade de um sistema mecânico formado por um pêndulo duplo planar sobre um kart. Referências naturais para este capítulo são [AS04] e [Jur97].

6.1 O modelo matemático

Considere-se um pêndulo duplo formado por dois pêndulos matemáticos: uma barra e uma massa. A barra não admite distensão e a sua massa é desprezável. Não se consideram atritos nem tensões nas barras.

Supõe-se o pivô do pêndulo fixo sobre um carro que admite uma deslocação segundo o eixo horizontal. Supõe-se ainda que o pêndulo descreve um movimento planar no plano vertical. Ao carro é aplicada uma aceleração $u(\cdot)$. Designem-se por m_1 , m_2 e r_1 , r_2 a massa e o comprimento de cada um dos pêndulos, respectivamente e por θ_i ; $i = 1, 2$ o ângulo formado por cada um dos pêndulos e a parte positiva do eixo vertical no instante t , isto é, $\theta_i \equiv \theta_i(t)$ com $\theta_i : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$; $i = 1, 2$.

Considere-se a descrição do movimento do pêndulo em relação a um referencial associado ao carro: sobre cada uma das massas actua uma força resultante da aplicação da aceleração. Sendo $\theta(\cdot) = (\theta_1(\cdot), \theta_2(\cdot))$, a energia cinética do sistema é

$$T(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) r_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 r_1 r_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \dot{\theta}_2^2$$

e a energia potencial

$$U(\theta, t) = g [(m_1 + m_2) r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2].$$

Recorrendo às equações de Euler-Lagrange, escrevem-se as equações da dinâmica. Uma vez que o sistema é não conservativo obtém-se

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} = m_i u(t), \quad i = 1, 2,$$

onde $L = L(\theta, \dot{\theta}, t) = T(\theta, \dot{\theta}, t) - U(\theta, t)$ e $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a função de controlo. Este é um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de segunda ordem em θ_i ; $i = 1, 2$. Denotando

$$r_1 r_2 [m_1 + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)] = \Delta(\theta) > 0, \quad (6.1)$$

$\dot{\theta}_i = \omega_i$; $i = 1, 2$ e $z = (\theta_1, \theta_2, \omega_1, \omega_2)$, o sistema anterior pode ser descrito por um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\dot{z} = f(z) + h(z)u(t), \quad (6.2)$$

onde

$$f(z) = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{pmatrix} \omega_1 \Delta(\theta) \\ \omega_2 \Delta(\theta) \\ -g r_2 [m_2 \sin \theta_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) \sin \theta_1] \\ -g r_1 (m_1 + m_2) [\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin \theta_1 - \sin \theta_2] \end{pmatrix} + \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\Delta(\theta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -m_2 r_2 [r_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_1^2 + r_2 \omega_2^2] \\ r_1 [r_1 (m_1 + m_2) \omega_1^2 + r_2 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \omega_2^2] \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

e

$$h(z) = \frac{1}{\Delta(\theta)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_2 [r_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - r_2 m_1] \\ r_1 [r_2 m_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - r_1 (m_1 + m_2)] \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Observe-se que as variáveis ω_i ; $i = 1, 2$ representam velocidades, $\dot{\theta}_i$; $i = 1, 2$. Restrinjam-se as variáveis θ_i ; $i = 1, 2$ a $[-\pi, \pi)^2$. No restante trabalho será conveniente, por simplicidade, usar a seguinte notação

$$\Delta(\theta) f(z) = \begin{pmatrix} \Omega_1(z) \\ \Omega_2(z) \\ a_1(z) \\ a_2(z) \end{pmatrix}, \quad \Delta(\theta) h(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_2 \\ b_1(\theta) \\ b_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = \partial_\theta, \quad \frac{\partial}{\partial \omega} = \partial_\omega, \quad (6.5)$$

$$\Omega(z) = \begin{pmatrix} \Omega_1(z) \\ \Omega_2(z) \end{pmatrix}, \quad a(z) = \begin{pmatrix} a_1(z) \\ a_2(z) \end{pmatrix}, \quad b(\theta) = \begin{pmatrix} b_1(\theta) \\ b_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$\bar{\Omega}(\theta) = -\Delta(\theta)b(\theta) \quad \text{e} \quad \bar{b}^T(\theta) = b^T(\theta)[2\Delta(\theta)\partial_\theta b - \partial_\omega(b^T(\theta)\partial_\omega a)] \quad (6.7)$$

onde o sobrescrito T representa o vector transposto.

Pretende-se estudar a controlabilidade do sistema (6.2). Para isso, usar-se-á um resultado de Poincaré baseado no conceito de estabilidade no sentido de Poisson e alguns conceitos e resultados da teoria geométrica do controlo que se introduzem de seguida.

6.2 Conceitos e resultados auxiliares

O primeiro conceito a introduzir é o de estabilidade de Poisson. Este conceito de estabilidade está associada ao campo vectorial que define o modelo. Para que um ponto seja estável no sentido de Poisson algumas trajectórias com início na vizinhança do ponto devem tornar a essa vizinhança para tempos arbitrariamente grandes.

Definição 6.1 (Estabilidade de Poisson). *Um ponto $p \in V$ é estável no sentido de Poisson para um campo vectorial completo $X \in \text{Vec } V$ se, para quaisquer $t > 0$ e vizinhança U de p , existirem $q \in U$ e $t' > t$ tais $q \circ P_{t'} \in U$, onde P_t é o fluxo associado a X .*

De acordo com a definição anterior, por exemplo, todos os pontos de uma solução periódica de uma equação diferencial são estáveis no sentido de Poisson. Um campo vectorial $X \in \text{Vec } V$ é estável no sentido de Poisson, se todos os pontos de V forem estáveis para X . O seguinte teorema caracteriza estes conjuntos, [AS04].

Teorema 6.1 (Poincaré). *Suponha-se que em V está definida a forma de volume Vol . Seja $X \in \text{Vec } V$ um campo vectorial completo cujo fluxo P_t preserva o volume. Considere-se um subconjunto $W \subset V$, $W \subset \text{int } W$, de volume finito e invariante para X*

$$\text{Vol}(W) < \infty, \quad W \circ P_t \subset W, \quad t > 0.$$

Nestas condições, todos os pontos de W são estáveis para X no sentido de Poisson.

Relativamente a sistemas Hamiltonianos, é válido o resultado seguinte, que permite concluir que campos Hamiltonianos em variedades compactas são estáveis no sentido de Poisson

Teorema 6.2 (Liouville). *O fluxo de sistemas Hamiltonianos preserva o volume.*

Dada uma família de campos vectoriais diferenciáveis e completos de uma variedade V ,

$$\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_k\} \subset \text{Vec } V,$$

a álgebra de Lie de campos vectoriais gerada pela família \mathcal{F} é definida por

$$\text{Lie}(\mathcal{F}) = \text{span}\{[X_1, [\dots [X_{k-1}, X_k] \dots]] : X_i \in \mathcal{F}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Os elementos de $\text{Lie}(\mathcal{F})$ são ainda elementos de $\text{Vec } V$. De facto, $\text{Lie}(\mathcal{F})$ é igual ao menor sub-espço vectorial S de $\text{Vec } V$ para o qual $\mathcal{F} \subset S$ e $[X, S] \subset S$ para todo o $X \in \mathcal{F}$. De um modo geral $\text{Lie}(\mathcal{F})$ é um sub-espço de dimensão infinita de $\text{Vec } V$. Avaliando os elementos da álgebra $\text{Lie}(\mathcal{F})$ num ponto $p \in V$ obtém-se um conjunto de vectores tangentes à variedade V em p . Este conjunto é denotado por

$$\text{Lie}_p(\mathcal{F}) = \{p \circ X : X \in \text{Lie}(\mathcal{F})\} \subset T_p V.$$

Definição 6.2 (Órbita). *O conjunto*

$$\mathcal{O}_p = \{p \circ e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_j X_j} : t_j \in \mathbb{R}, X_j \in \mathcal{F}, j \in \mathbb{N}\},$$

onde $e^{t_j X_j}$ é o fluxo associado ao campo vectorial X_j , designa-se por órbita da família \mathcal{F} em $p \in V$.

Uma órbita em $p \in V$ é, assim, o conjunto de pontos atingíveis de p ao longo da concatenação das trajectórias dos campos $X \in \mathcal{F}$ admitindo andamentos para a frente e para trás (com tempo inverso). Caso só seja permitido o deslocamento ao longo dos campos vectoriais no sentido positivo dos tempos, obtém-se o conjunto atingível

$$\mathcal{A}_p = \{p \circ e^{t_1 X_1} \circ \dots \circ e^{t_j X_j} : t_j \geq 0, X_j \in \mathcal{F}, j \in \mathbb{N}\}.$$

De um modo geral, a estrutura da órbita \mathcal{O}_p é mais regular que a do conjunto atingível \mathcal{A}_p . O resultado que se segue é válido para variedades analíticas, isto é, variedades cujas mudanças de coordenadas são analíticas (cf. Definição 1.1). A sua demonstração, pode ser encontrado em, por exemplo, [Jur97].

Teorema 6.3 (Hermann-Nagano). *Seja V uma variedade analítica e \mathcal{F} uma família analítica de campos vectoriais em V . Então*

- a) cada órbita de \mathcal{F} é uma sub-variedade analítica de V ,*
- b) se \mathcal{O}_p for uma órbita de \mathcal{F} por $p \in V$, o espaço tangente a \mathcal{O}_p em q é dado por $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$. Em particular, a dimensão de $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$ é constante quando q percorre \mathcal{O}_p .*

Definição 6.3 (Família bracket-generating). *Uma família $\mathcal{F} \subset \text{Vec } V$ de campos vectoriais diz-se bracket-generating¹ se*

$$\text{Lie}_p(\mathcal{F}) = T_p V, \quad (6.8)$$

para todo o $p \in V$.

Um campo vectorial $X \in \text{Vec } V$ é compatível com uma família $\mathcal{F} \subset \text{Vec } V$ se

$$\mathcal{A}_p(\mathcal{F} \cup X) \subset \overline{\mathcal{A}_p(\mathcal{F})}, \quad p \in V.$$

Será com base nos dois resultados que se seguem que se procurará, neste trabalho, concluir sobre a controlabilidade do sistema em estudo. A demonstração destes resultados pode ser encontrada em, por exemplo, [AS04].

Proposição 6.4. *Seja $\mathcal{F} \subset \text{Vec } V$ uma família bracket-generating. Se um campo $X \in \mathcal{F}$ for estável no sentido de Poisson, então o campo $-X$ é compatível com \mathcal{F} .*

Proposição 6.5. *Seja $\mathcal{F} \subset \text{Vec } V$ uma família bracket-generating cujo cone convexo positivo*

$$\text{cone}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{n=1}^k a_i X_i : X_i \in \mathcal{F}, a_i \in C^\infty(V), a_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{Vec } V$$

é simétrico. Então \mathcal{F} é controlável.

6.3 Análise da controlabilidade

Dois campos vectoriais estão naturalmente associados ao sistema (6.2), são eles

$$f(z)\partial_z \quad \text{e} \quad h(z)u(t)\partial_z \quad (6.9)$$

Na ausência de controlo, isto é, quando $u(t) \equiv 0; t > 0$, a dinâmica definida por $f\partial_z$ é Hamiltoniana. Uma variedade invariante para esta dinâmica é definida por uma equação $H := c$, onde H representa o Hamiltoniano associado ao campo vectorial definido por $f\partial_z$ e $c \in \mathbb{R}$ é uma constante que depende das condições iniciais do sistema. Designe-se por M tal conjunto.

Considere-se a seguinte família de campos vectoriais obtida dos campos (6.9) e parêntesis de Lie destes

$$\begin{aligned} X_1 &= \Delta(\theta) f(z)\partial_z = \Omega^T(z)\partial_\theta + a^T(z)\partial_\omega, & X_2 &= \Delta(\theta) h(z) = b^T(\theta)\partial_\omega, \\ X_3 &= [X_1, X_2] = \bar{\Omega}^T(\theta)\partial_\omega + \bar{a}^T(\theta)\frac{\partial b}{\partial \theta}\partial_\omega, & X_4 &= [X_2, X_3] = \bar{b}^T(\theta)\frac{\partial b}{\partial \theta}\partial_\omega. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Aqui, o sobrescrito T representa a transposição e notação segue (6.5)-(6.7). Denote-se

$$\{X_1, X_2, X_3, X_4\} = \mathcal{F}. \quad (6.11)$$

¹ou completamente não holonómica

Teorema 6.6. *Se \mathcal{F} for uma família bracket-generating, para todo o $p \in M$ o conjunto atingível \mathcal{A}_p coincide com a órbita \mathcal{O}_p .*

Demonstração. Dos campos de \mathcal{F} é possível reconstruir os campos $f(z)\partial_z$ e $h(z)u(t)\partial_z$. Uma vez que o sistema $\dot{z} = f(z)$ é Hamiltoniano, o teorema de Liouville garante que o fluxo do sistema preserva o volume na variedade compacta M , isto é $f(z)\partial_z$ é estável no sentido de Poisson. Da Proposição 6.4 segue que $-f(z)\partial_z$ é compatível com \mathcal{F} . Logo, para todo o $p \in M$

$$\mathcal{A}_p = \mathcal{O}_p.$$

Corolário 6.7. *Nas condições do Teorema 6.6 sistema (6.2) é controlável.*

Demonstração. Com efeito, nas condições do Teorema 6.6 o cone

$$\text{cone}(\mathcal{F}) = \left\{ \sum_{n=1}^k a_i X_i : X_i \in \mathcal{F}, a_i \in C^\infty(M), a_i \geq 0, k \in \mathbb{N} \right\}$$

é simétrico. Pela Proposição 6.5 o sistema é controlável.

Resta mostrar que a família de campos vectoriais definida em (6.11) é, de facto, uma família *bracket-generating* para o sistema (6.2).

6.3.1 Família *bracket-generating*

Lema 6.8. *A família de campos vectoriais \mathcal{F} definida em (6.10)-(6.11) é uma família bracket-generating.*

A demonstração deste resultado, embora não seja difícil, é um pouco fastidiosa pois envolve o estudo de sub-regiões de M definidas à custa de várias equações analíticas. A descrição destas regiões pode ser encontrada no Apêndice B.

O argumento principal usado na demonstração é que a dimensão de $\text{Lie}_p(\mathcal{F})$ é constante para todo o p pertencente a uma órbita de \mathcal{F} .

Demonstração. Seja Γ a região de M na qual os campos X_2 e X_4 são linearmente dependentes. Seja, ainda, Υ a região de M onde os campos X_1 e X_3 são linearmente dependentes nas direcções ∂_θ . Designe-se

$$\overline{M} = M \setminus (\Gamma \cup \Upsilon)$$

a região de M onde os campos definidos em (6.10) são linearmente independentes. Isto implica que

$$\dim \text{Lie}_p(\mathcal{F}) = 4, \quad \text{para todo o } p \in \overline{M}.$$

Mostra-se que as regiões singulares Γ e Υ são regiões não invariantes por¹ \mathcal{F} , isto é, a órbita do sistema abandona estas regiões. De facto, embora os campos X_2 e X_4 sejam linearmente dependentes em Γ , usando o campo X_2 e o campo X_3 , é sempre possível abandonar esta

¹vide Apêndice B.2

superfície ao longo da órbita do sistema¹. Efectivamente, denotando por x_2 e x_3 o vector das componentes dos campos X_2 e X_3 , respectivamente, tem-se

$$x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1(\theta) \\ b_2(\theta) \end{pmatrix} \quad x_3 = \begin{pmatrix} \Delta(\theta) b_1(\theta) \\ \Delta(\theta) b_2(\theta) \\ * \\ * \end{pmatrix}$$

e, uma vez que $b_1(\theta)$ e $b_2(\theta)$ nunca se anulam simultaneamente, x_2 e x_3 nunca são colineares. Uma situação análoga acontece para a região Υ , sendo, neste caso, necessário utilizar também o campo X_4 . A prova destes factos é feita em três passos. Começa-se por definir uma região S_k , em seguida determinam-se as soluções da equação $Y_i \cdot S_k = 0$. A última equação define uma sub-região $S_{k+1} \subset S_k$ invariante em relação a Y_i . Com estas soluções definem-se novas regiões S_{k+1} . Para mais detalhes, referir-se ao Apêndice B (Secção B.2.1 e B.2.2).

Designa-se por Σ a região de M onde os campos X_1, X_3 são linearmente dependentes na direcção ∂_ω e X_2, X_4 são linearmente dependentes (na direcção ∂_θ). Logo, Σ resulta da intersecção das regiões Γ e Υ e aqui os campos X_2 e X_3 são linearmente independentes. Assim, a sua dimensão é dois.

Seja q_0 um ponto de uma órbita Ω_p gerada pela família \mathcal{F} . Analisem-se quatro situações diferentes.

Comece-se por considerar $q_0 \in \Sigma$. Como foi referido anteriormente, o sistema abandona Σ . Quando \mathcal{O}_{q_0} abandona Σ visita \overline{M} , Υ ou Γ .

Suponha-se, agora, que $q_0 \in \overline{M}$. Em \overline{M} os campos de \mathcal{F} são linearmente independentes. A órbita da família \mathcal{F} por q_0 , em \overline{M} , é, então, gerada pelos quatro campos, isto é, a dimensão de \mathcal{O}_{q_0} é 4. Donde, a dimensão do espaço tangente à órbita em qualquer z de \mathcal{O}_{q_0} , $T_z \mathcal{O}_{q_0}$, é também quatro. Além disso, pelo teorema de Hermann-Nagano

$$T_z \mathcal{O}_{q_0} = \text{Lie}_z(\mathcal{F}), \quad \text{e} \quad \dim \text{Lie}_z \mathcal{F} = 4$$

para todo o z em \mathcal{O}_{q_0} . Uma vez que também a dimensão de $T_z \overline{M}$, para z em \overline{M} , é 4 pode-se concluir que

$$T_z \overline{M} = \text{Lie}_z(\mathcal{F}), \quad \text{para } z \text{ em } \overline{M}.$$

Tome-se, agora, $q_0 \in (\Upsilon \setminus \Sigma)$. O sistema abandona $\Upsilon \setminus \Sigma$. Se \mathcal{O}_{q_0} sai de Υ para \overline{M} , como aqui a dimensão da álgebra de Lie gerada por \mathcal{F} e avaliada num qualquer z é 4, sendo esta dimensão constante quando z percorre a órbita, conclui-se que também em $\Upsilon \setminus \Sigma$ a dimensão do espaço tangente à órbita será quatro: $\dim T_z \mathcal{O}_{q_0} = 4$. Recorrendo ao teorema de Hermann-Nagano, tem-se

$$\dim \text{Lie}_z(\mathcal{F}) = 4, \quad z \in (\Upsilon \setminus \Sigma)$$

o que significa que existem alguns parêntesis de Lie de campos de \mathcal{F} , em número de quatro, que geram $\text{Lie}_z \mathcal{F}$, $z \in (\Upsilon \setminus \Sigma)$. A situação em que a órbita da família \mathcal{F} por q_0 abandona $\Upsilon \setminus \Sigma$ e entra em Γ só pode ocorrer sobre a intersecção, isto é, na primeira situação.

¹Para mais detalhes ver Secção B.2.1

Por último, suponha-se $q_0 \in (\Gamma \setminus \Sigma)$. A órbita \mathcal{O}_{q_0} abandona esta superfície. Se \mathcal{O}_{q_0} visita \overline{M} , por um raciocínio análogo ao do segundo caso, existem alguns parêntesis de Lie que geram $\text{Lie}_z(\mathcal{F})$, $z \in (\Gamma \setminus \Sigma)$. A situação em que \mathcal{O}_{q_0} visita $\Upsilon \setminus \Sigma$ remete para a terceira situação.

Conclui-se, assim, que para z em M ,

$$T_z M = \text{Lie}_z \mathcal{F},$$

ou seja, a família \mathcal{F} é *bracket-generating* em M . ■

6.4 Comentário

Sendo que os campos X_2 e X_4 só têm componentes não nulas em duas direcções, ∂_ω , parece natural procurar dois outros campos cujas componentes não nulas sejam só nas direcções ∂_θ . Na região de M onde os campos X_2, X_4 são linearmente independentes estes constituem, obviamente, uma base para as direcções $\partial\omega$. Assim, é possível obter, a partir de X_1 e X_3 , novos campos Y_1 e Y_3 cujas entradas associadas às direcções $\partial\omega$ sejam nulas

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 - (\gamma_2(z) X_2 + \gamma_4(z) X_4), & \gamma_2, \gamma_4 &\in \mathbb{R} \\ Y_3 &= X_3 - (\tilde{\gamma}_2(z) X_2 + \tilde{\gamma}_4(z) X_4), & \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_4 &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Isto é, os novos campos são tais que $Y_1 = \Omega^T(z)\partial_\theta$ e $Y_3 = \bar{\Omega}^T(\theta)\partial_\theta$ já que a operação (6.12) não altera as componentes nas direcções ∂_θ . Desta forma poder-se-ia tomar uma nova família de campos, seja

$$\mathcal{G} = \{Y_1, X_2, Y_3, X_4\}.$$

Naturalmente, resultando os campos de \mathcal{G} de combinações lineares de campos de \mathcal{F} , também \mathcal{G} é uma família *bracket-generating* para o sistema (6.2). Acontece que esta família não está definida em todo o M sendo necessário sempre considerar outros campos no estudo da região Γ .

No final do Apêndice B são apresentadas as quatro condições sobre os parâmetros do sistema que traduzem sistemas mecânicos cuja controlabilidade não foi provada.

Apêndice A

Expansões assintóticas

Para uma abordagem sistemática às expansões assintóticas recomenda-se [Mur84] e [Was02] para aplicações às equações diferenciais.

Sejam f e g duas funções de uma variável¹ x definidas num domínio D . Diz-se que $f(x)$ é $O(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$, e escreve-se $f(x) = O(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, se existem constantes positivas δ e K tais que

$$|f(x)| < K|g(x)| \quad \text{quando } x \rightarrow x_0.$$

De modo análogo, diz-se que $f(x)$ é $o(g(x))$ quando $x \rightarrow x_0$, e escreve-se $f(x) = o(g(x))$, $x \rightarrow x_0$, se para todo o $\varepsilon > 0$,

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)| \quad \text{numa vizinhança de } x_0.$$

Na prática estas duas notações indicam que o quociente f/g é limitado, no caso O , e que $f/g \rightarrow 0$ no caso o .

A notação O (o-grande) e o (o-pequeno) foi introduzida inicialmente por Bachmann em 1894². É contudo frequente, a designação de *símbolos de Landau* em honra de Landau, o matemático alemão que a divulgou.

É possível operar com O e o , sendo válido

$$\begin{aligned} o(f) &\text{ é } O(f), & O(f) + O(f) &\text{ é } O(f), \\ O(f)O(g) &\text{ é } O(fg), & O(O(f)) &\text{ é } O(f). \end{aligned}$$

Note-se que, embora se utilize o sinal de igual para expressar o conceito de “da ordem de”, esta não é uma relação de equivalência. Basta considerar que, por exemplo, $O(n)$ é $O(n^2)$ mas $O(n^2)$ não é, obviamente, $O(n)$. Por esta razão, alguns autores preferem a notação de conjuntos, escrevendo então $f \in O(g)$. Neste caso entende-se, $O(g(x))$ como o conjunto de todas as funções dominadas por g .

Diz-se que f é *assintoticamente igual* a g quando $x \rightarrow x_0$ e escreve-se

$$f \sim g \quad \text{quando } x \rightarrow x_0$$

se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{A.1}$$

¹real ou complexa

²P. Bachmann, *Analytic number theory*, vol.2, 1894

Por exemplo, no caso de funções analíticas num dado ponto, a sua série de Taylor traduz o comportamento da função numa vizinhança desse ponto e esta série define uma função assintoticamente igual a f no sentido de (A.1).

Considere-se uma sucessão de funções $\{\phi_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$. A sucessão $\{\phi_n(x)\}$ diz-se uma *sucessão assintótica* quando $x \rightarrow x_0$ se, para todo o n

$$\phi_{n+1}(x) = o(\phi_n(x)) \quad \text{quando } x \rightarrow x_0.$$

A definição que de seguida se apresenta baseia-se no conceito de sucessão assintótica, inicialmente introduzida por Poincaré em 1886¹.

Definição A.1. Dada uma sucessão assintótica $\{\phi_n(x)\}$ quando $x \rightarrow x_0$ diz-se que

$$\sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x), \quad (\text{A.2})$$

onde a_n são constantes, é uma expansão assintótica da função f se, para cada N

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x) + o(\phi_N(x)), \quad \text{quando } x \rightarrow x_0.$$

A igualdade anterior pode ainda ser escrita na forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N-1} a_n \phi_n(x) + O(\phi_N(x)), \quad \text{quando } x \rightarrow x_0. \quad (\text{A.3})$$

A expansão (A.3) indica que o erro cometido na aproximação de f pela soma (A.2) é da mesma ordem do primeiro termo omitido. Esta expansão só é válida no domínio de definição da sucessão $\{\phi_n(x)\}$. Note-se que em (A.2) não está indicado qualquer limite superior no somatório. Para expressar a liberdade de escolha de N em (A.3) usa-se a notação de assintoticamente igual escrevendo-se

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad x \rightarrow x_0.$$

Esta definição não implica que a série do segundo membro é convergente, indica simplesmente que (A.3) se verifica para todo o N .

Dada uma sucessão assintótica $\{\phi_n(x)\}$, existe uma expansão assintótica para f e esta é única. Os coeficientes a_n são univocamente determinados pelos seguintes limites

$$a_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\phi_1(x)}, \quad a_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_1 \phi_1(x)}{\phi_2(x)}, \quad \dots, \quad a_{N-1} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - \sum_{n=1}^{N-2} a_n \phi_n(x)}{\phi_{N-1}(x)}.$$

Assim, a expansão assintótica de f depende da sucessão assintótica escolhida pelo que, para a mesma função, existem diversas expansões assintóticas. Por exemplo, a função $f(x) = 1/(x-1)$, $|x| > 1$ admite as expansões

$$\frac{1}{x-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad x \rightarrow \infty, \quad \frac{1}{x-1} \sim (x+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{2n}}, \quad x \rightarrow \infty$$

¹H. Poincaré. Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta Math. VIII. 295-344. (1886)

para as sucessões $\{x^{-n}\}$ e $\{x^{-2n}\}$, respectivamente.

Sendo

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n(x), \quad x \rightarrow x_0 \qquad g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \phi_n(x), \quad x \rightarrow x_0$$

toda a sua combinação linear $\alpha f(x) + \beta g(x)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ admite expansão assintótica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \phi_n(x), \quad x \rightarrow x_0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

no entanto o produto de f e g pode não admitir expansão assintótica. Com efeito, o produto de duas expansões assintóticas conduz a termos da forma

$$\phi_n(x) \phi_m(x), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

que pode não ser uma sucessão assintótica.

No caso particular de as expansões assintóticas serem séries de potências, o produto admite também expansão assintótica na intersecção dos domínios das funções. Além disso, estas séries podem ser integradas termo a termo e a série resultante é ainda uma série assintótica contrariamente à diferenciação termo a termo que não conduz a uma tal série. Contudo, se tanto f como a sua derivada admitirem expansão em série assintótica quando $x \rightarrow x_0$, a série resultante é ainda uma série de potências assintótica. Por exemplo,

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} \quad x \rightarrow x_0$$

$$f'(x) \sim - \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{a_n}{x^{n+1}}, \quad x \rightarrow x_0$$

no domínio de intersecção.

Caso uma função seja analítica numa região \mathcal{R} possui, por definição, uma expansão em série assintótica convergente. Pela unicidade da expansão assintótica, esta deve coincidir com a expansão obtida para a sucessão $\{x^{-n}\}$. Assim, tal expansão assintótica é integrável e diferenciável em \mathcal{R} . Caso a função não seja analítica, a expansão em série assintótica não poderá ser a mesma para todos os pontos do seu domínio.

Apêndice B

Pêndulo num kart: análise dos campos de \mathcal{F}

Analisando as componentes dos campos que constituem a família \mathcal{F} conclui-se que o campo X_1 se anula em quatro pontos $(0, 0, 0, 0)$, $(0, \pi, 0, 0)$, $(\pi, 0, 0, 0)$ e $(\pi, \pi, 0, 0)$ que correspondem aos quatro pontos de equilíbrio do sistema, enquanto os campos X_2 e X_3 nunca se anulam. O vector que define o campo X_4 pode ser escrito como

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) \begin{pmatrix} \varphi_{31}(\theta) \\ \varphi_{32}(\theta) \end{pmatrix}$$

onde $\varphi_{31}(\theta) = \sum_{k=1}^3 \xi_k \cos^k(\theta_1 - \theta_2)$ e $\varphi_{32}(\theta) = \sum_{k=1}^3 \zeta_k \cos^k(\theta_1 - \theta_2)$ são dois polinómios do terceiro grau em $\cos(\theta_1 - \theta_2)$ e os coeficientes ξ_k e ζ_k que dependem das massas e comprimentos dos pêndulos são dados por

$$\begin{aligned} \xi_0 &= r_1 r_2 (m_1 + m_2) [(m_1 + m_2)^2 r_1^2 - m_1 m_2 r_2^2], \\ \xi_1 &= -m_2 (m_1 + m_2)^2 r_1^4 - (m_1 + m_2) (m_1^2 + m_1 m_2 - m_2^2) r_1^2 r_2^2 - r_2^4 m_1^2 m_2, \\ \xi_2 &= r_1 r_2 m_2 [(m_1^2 - m_2^2) r_1^2 + 3 m_1 m_2 r_2^2], \\ \xi_3 &= r_1^2 r_2^2 m_2^2 (m_1 - 2 m_2), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= r_1 r_2 m_1 (m_1 + m_2)^2 (r_1^2 - r_2^2), \\ \zeta_1 &= m_2 (m_1 + m_2)^2 r_1^4 - (m_1 + m_2) (m_1^2 - m_1 m_2 - m_2^2) r_1^2 r_2^2 + r_2^4 m_1^2 m_2, \\ \zeta_2 &= -r_1 r_2 m_1 m_2 [3 (m_1 + m_2) r_1^2 - (m_1 - m_2) r_2^2], \\ \zeta_3 &= r_1^2 r_2^2 m_1 m_2 (2 m_1 - m_2). \end{aligned}$$

Os coeficientes ξ_k nunca se anulam simultaneamente, assim como os coeficientes ζ_k . Assim, o campo X_4 anula-se sempre que $\theta_1 = \theta_2$ e $\theta_2 \in [-\pi, \pi)$, $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ e que os polinómios $\varphi_{31}(\theta)$ e $\varphi_{32}(\theta)$ se anulem simultaneamente.

B.1 Dependência linear dos campos

Está-se interessado em conhecer a região de M onde os campos de \mathcal{F} são linearmente independentes. Começa-se por analisar os campos X_2 e X_4 , cujas componentes nas direcções componentes não nulas nas direcções ∂_ω . De seguida, considera-se os campos X_1 e X_3 , no entanto, estuda-se unicamente a sua independência nas direcções ∂_θ . Garantindo a independência linear de X_1 e X_3 nas direcções de ∂_θ e de X_2 e X_4 nas direcções de ∂_ω garante-se a independência linear dos quatro campos.

B.1.1 Campos X_2 e X_4 : região Γ

Os campos vectoriais X_2 e X_4 só têm componentes não nulas nas direcções de ∂_ω . Os campos serão linearmente independentes caso o determinante da matriz cujas columnas são formadas pelas componentes destes campos nas direcções ω seja diferente de zero. Designe-se este determinante por $\alpha_{2,4}(\theta)$ e por Γ a região de M definida pela equação $\alpha_{2,4}(\theta) = 0$. Tem-se

$$\begin{aligned}\alpha_{2,4}(\theta) &= b_1^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_1} b_2(\theta) + b_1(\theta) b_2(\theta) \left(\frac{\partial}{\partial \theta_2} b_2(\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta_1} b_1(\theta) \right) - b_2^2(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta_2} b_1(\theta) \\ &= \sin(\theta_1 - \theta_2) \sum_{k=1}^4 \alpha_k \cos^k(\theta_1 - \theta_2) = \sin(\theta_1 - \theta_2) \varphi_4(\theta),\end{aligned}\tag{B.1}$$

onde os coeficientes $\alpha_i; i = 1, \dots, 4$ dependem unicamente da massa e do comprimento dos pêndulos

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= -r_1 r_2 (m_1 + m_2)^2 [r_2^4 m_1^2 - r_1^2 r_2^2 m_1 (m_1 + m_2) + r_1^4 (m_1 + m_2)^2] \\ \alpha_1 &= m_2 (m_1 + m_2)^3 r_1^6 + (m_1 + m_2)^2 (2 m_1^2 + 2 m_2 m_1 - m_2^2) r_1^4 r_2^2 - \\ &\quad - m_1 (m_1 + m_2) (m_1^2 - 2 m_2 m_1 - 2 m_2^2) r_1^2 r_2^4 + r_2^6 m_1^3 m_2 \\ \alpha_2 &= -r_1 r_2 [2 r_2^4 m_1^2 m_2^2 + (m_1 + m_2)^4 r_1^2 r_2^2 + 2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)^2 r_1^4] \\ \alpha_3 &= r_1^2 r_2^2 m_2 [(m_1 + m_2) (m_1^2 + m_1 m_2 + 2 m_2^2) r_1^2 + m_1 (2 m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) r_2^2] \\ \alpha_4 &= -r_1^3 r_2^3 m_1 m_2^2 (m_1 + m_2).\end{aligned}$$

Uma vez que, por exemplo, o coeficiente α_4 nunca se anula, $\alpha_{2,4}(\theta)$ não é identicamente igual a zero. Constata-se que $\alpha_{2,4}(\theta) = 0$ é a reunião de, no máximo, dez hiperplanos definidos por condições do tipo

$$\theta_1 - \theta_2 = d_j; j = 1, \dots, 10, \text{ e } \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$$

sendo d_j constantes.

Uma vez que os campos X_2 e X_4 são linearmente dependentes sobre a superfície¹ Γ , denote-se por $\tilde{M} = M \setminus \Gamma$ a região onde estes campos são linearmente independentes. Assim sendo, aqui, os campos formam uma base para a direcção ∂_ω .

B.1.2 Campos X_1 e X_3 : região Υ

Por um raciocínio análogo ao utilizado na secção anterior, conclui-se que os campos X_1 e X_3 são linearmente dependentes nas direcções ∂_θ se

$$\alpha_{1,3}(z) = \omega_1 b_2(\theta) - \omega_2 b_1(\theta) = 0.$$

¹ $\dim \Gamma = 3$

Designa-se por Υ a superfície¹ definida pela equação $\alpha_{13}(z) = 0$. Tem-se $\alpha_{13}(\theta) = 0$ quando

$$\theta_1, \theta_2 \in [-\pi, \pi), \quad \omega_1 = \omega_2 \frac{r_2 [r_2 m_1 - r_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}{r_1 [r_2 m_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + r_1 (m_1 + m_2)]}, \quad \omega_2 \in \mathbb{R}$$

ou

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{m_1 r_2}{m_2 r_1}, \quad \theta_2 \in [-\pi, \pi), \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 \in \mathbb{R}.$$

Observe-se que a segunda condição só é admissível caso $\frac{r_2}{r_1} \leq \frac{m_2}{m_1}$.

B.2 Análise da invariância

Na demonstração do Lema 6.8 é referida a não invariância de algumas regiões pelos campos da família \mathcal{F} . É a análise da invariância dessas regiões que se apresenta nesta secção.

O procedimento usado é iterativo. Considera-se uma região e estuda-se a sua invariância por um campo de \mathcal{F} , ou uma combinação linear deles. Normalmente, surge uma sub-região dessa região que é invariante pelo campo considerado. Repete-se o processo até o conjunto de invariância ser um conjunto numerável de pontos.

Esquemáticamente, as regiões a considerar estão representadas na figura seguinte.

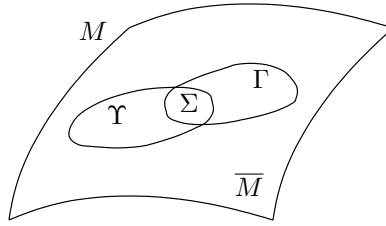


Figura B.1: Regiões de M

B.2.1 Invariância de Γ

Recorde-se que Γ é a região onde os campos X_2, X_4 são linearmente dependentes. Atendendo a que $\alpha_{24}(\theta)$ é o produto de duas funções (cf. (B.1)) o estudo da invariância desta região faz em duas partes.

Estude-se a invariância do conjunto

$$I_s = \{z \mid \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}\}$$

pelos campos da família \mathcal{F} . Este conjunto reúne as condições $\theta_1 - \theta_2 = 0$ e $\theta_1 - \theta_2 = \pi$. Apresenta-se, somente, a primeira situação por a segunda ser em tudo análoga. Tome-se o campo X_1 .

$S : \theta_1 - \theta_2 = 0$. Tem-se

$$X_1 \cdot S = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$$

e $I_1 = \{z \mid \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \omega_1 - \omega_2 = 0, \omega_1 \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto de pontos de S invariante por X_1 . Seja S_1 a região definida por I_1 .

¹dim $\Upsilon = 3$

$S_1 : \omega_1 - \omega_2 = 0$. Tem-se

$$X_1 \cdot S_1 = 0 \Rightarrow \sin \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0 \vee \theta_1 = -\pi$$

e $I_2 = \{z | \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \sin \theta_1 = 0, \omega_1 - \omega_2 = 0, \omega_1 \in \mathbb{R}\}$ é o conjunto de pontos de S_1 invariante por X_1 .

$S_2 : \theta_1 = 0$. A condição

$$X_1 \cdot S_2 = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0$$

define o conjunto $I_3 = \{z | \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \sin \theta_1 = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0\}$. Este corresponde a um conjunto formado por quatro pontos

$$\{z | \theta_1 = -\pi, 0; \theta_2 = -\pi, 0; \omega_1 = 0; \omega_2 = 0\}.$$

Neste conjunto pontos, as componentes dos campos da família \mathcal{F}_0 são

$$\begin{aligned} X_1 &: (0, 0, 0, 0), \\ X_2 &: (0, 0, r_2 (r_2 m_1 - r_1 m_2), r_1 (r_2 m_1 + r_1 (m_1 + m_2))) \\ X_3 &: r_1 r_2 (r_2 m_1 (r_2 m_1 - r_1 m_2), r_1 m_1 (r_2 m_1 + r_1 (m_1 + m_2)), 0, 0) \\ X_4 &: (0, 0, 0, 0). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Seja, agora,

$$I_c = \{z | \varphi_4(\theta) = 0, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que $\varphi_4(\theta)$ é um polinómio do quarto grau em $\cos(\theta_1 - \theta_2)$, a condição $\varphi_4(\theta) = 0$ corresponde a $\cos(\theta_1 - \theta_2) = c_k$, sendo $c_k; 1 \leq k \leq 4$ uma das raízes da equação $\sum_{k=0}^4 \alpha_k x^k$. Donde $\theta_1 - \theta_2 = d_j$ sendo $d_j; 1 \leq j \leq 8$ constantes. Daqui obtém-se, genericamente,

$$\theta_2 = \theta_1 - d, \quad \cos d = c, \quad \sin d = s \tag{B.3}$$

sendo d, c, s constantes. Analisem-se, em separado, cada uma destas três hipóteses.

$S : \theta_1 - \theta_2 = d$. Tem-se

$$X_1 \cdot S = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$$

e $I_1 = \{z | \theta_1 - \theta_2 = d, \omega_1 - \omega_2 = 0\}$ é a sub-região de I_c invariante por X_1 .

$S_1 : \omega_1 - \omega_2 = 0$. Para esta sub-região vem

$$\begin{aligned} X_1 \cdot S_1 = 0 &\Rightarrow f_s \sin(\theta_1) + f_c \cos(\theta_1) + f_\omega \omega_1^2 = 0 \\ &\Rightarrow \theta_1 = \alpha + \arccos(\bar{f}_\omega) \end{aligned} \tag{B.4}$$

onde

$$\begin{aligned} f_s &= g r_2 [m_1 + m_2 s^2], & f_c &= g s [r_2 m_2 c + r_1 (m_1 + m_2)] \\ f_\omega &= -s [r_1^2 (m_1 + m_2) + m_2 r_2 (r_2 + 2 c r_1)], & \bar{f}_\omega &= \frac{f_\omega}{\sqrt{f_c^2 + f_s^2}} \end{aligned}$$

e α é um ângulo tal que $\cos \alpha = f_c / \sqrt{f_c^2 + f_s^2}$ e $\sin \alpha = f_s / \sqrt{f_c^2 + f_s^2}$. As condições (B.3) e (B.4) definem uma curva ($\dim = 1$). Sob as actuais condições, há dois campos, X_2 e X_3 , que são linearmente independentes pelo que a órbita do sistema abandona esta curva. Note-se que esta curva nunca degenera num ponto, pois $f_s \neq 0$, para todos os m_1 e m_2 .

Assim, Γ nunca é invariante por \mathcal{F} .

B.2.2 Invariância de Υ

Na Secção B.1.2, definiu-se a região Υ pela condição $\alpha_{13}(z) = 0$. Analise-se, agora, a invariância do conjunto $I = \{z | \alpha_{13}(z) = 0\}$ pelo campo X_4 .

$S : \alpha_{13}(z) = 0$. Ora

$$X_4 \cdot S = 0 \Rightarrow \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \vee \psi_4(\theta) = 0,$$

onde

$$\psi_4(\theta) = 2 r_1 r_2 \sum_{k=0}^4 \beta_k \cos^k(\theta_1 - \theta_2)$$

e os coeficientes β_k são constantes dadas por

$$\begin{aligned} \beta_0 &= r_1 r_2 (m_1 + m_2)^2 [(m_1 + m_2)^2 r_1^4 - m_1 (m_1 + m_2) r_1^2 r_2^2 + r_2^4 m_1^2] \\ \beta_1 &= -m_2 (m_1 + m_2)^3 r_1^6 - (2 m_1^2 + 2 m_1 m_2 - m_2^2) (m_1 + m_2)^2 r_1^4 r_2^2 + \\ &\quad + m_1 (m_1 + m_2) (m_1^2 - 2 m_1 m_2 - 2 m_2^2) r_1^2 r_2^4 - m_1^3 m_2 r_2^6 \\ \beta_2 &= r_1 r_2 [2 m_1 m_2 (m_1 + m_2)^2 r_1^4 + (m_1 + m_2)^4 r_1^2 r_2^2 + 2 m_1^2 m_2^2 r_2^4] \\ \beta_3 &= -r_1^2 r_2^2 m_2 [(m_1 + m_2) (m_1^2 + m_1 m_2 + 2 m_2^2) r_1^2 + m_1 (2 m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2) r_2^2] \\ \beta_4 &= r_1^3 r_2^3 m_2^2 m_1 (m_1 + m_2). \end{aligned}$$

A função $\psi_4(\theta)$ nunca é identicamente nula pois, por exemplo, o coeficiente β_4 nunca se anula. Assim, as regiões de Υ invariantes por X_4 são definidas pelos conjuntos

$$I_1 = \{z | \alpha_{13}(z) = 0, \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0\} \quad \text{e} \quad I_2 = \{z | \alpha_{13}(z) = 0, \psi_4(\theta) = 0\}$$

Repita-se o processo para cada uma das regiões anteriores.

$S_1 : \theta_1 - \theta_2 = 0$. Tem-se

$$X_1 \cdot S_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$$

e a região de invariância é definida por

$$I_{11} = \{z | \alpha_{13}(z) = 0, \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \omega_1 - \omega_2 = 0\}$$

$S_{11} : \omega_1 - \omega_2 = 0$. A condição

$$X_1 \cdot S_{11} = 0 \Rightarrow \sin \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = 0 \vee \theta_1 = -\pi$$

define o conjunto

$$I_{111} = \{z | \alpha_{13}(z) = 0, \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \omega_1 - \omega_2 = 0, \sin \theta_1 = 0\}$$

que corresponde a duas sub-regiões de invariância que se podem estudar em simultâneo.

$S_{111} : \theta_1 = 0, -\pi$. A condição

$$X_1 \cdot S_{111} = 0 \Rightarrow \omega_1 = 0$$

conduz ao conjunto

$$I_{1111} = \{z | \alpha_{13}(z) = 0, \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \theta_1 = 0, -\pi\}$$

que é um conjunto formado por quatro pontos

$$\{z \mid \theta_1 = -\pi, 0; \theta_2 = -\pi, 0; \omega_1 = 0; \omega_2 = 0\},$$

tal como na Secção B.2.1.

$S_2 : \psi_4(\theta) = 0$. Uma vez que $\psi_4(\theta)$ é um polinómio do quarto grau em $\cos(\theta_1 - \theta_2)$, a condição $\psi_4(\theta) = 0$ é análoga à condição $\varphi_4(\theta) = 0$ estudada na Secção B.2.1 podendo, por isso, tirar-se a mesma conclusão: recorrendo aos campos X_2 e X_3 , a órbita do sistema abandona sempre a região definida pela condição $\psi_4(\theta) = 0$.

Assim, Υ nunca é invariante por campos \mathcal{F} .

B.2.3 Invariância de Σ

Na demonstração do Lema 6.8 definiu-se a região Σ como a intersecção das duas regiões onde os campos X_1, X_3 e X_2, X_4 são linearmente dependentes. Pretende-se, então, estudar a invariância do conjunto

$$I = \{z \mid \alpha_{13}(z) = 0, \alpha_{24}(z) = 0\}$$

por campos de \mathcal{F} ou por campos que resultem de combinação linear destes. Este conjunto é a reunião dos seguintes conjuntos

$$\begin{aligned} I_1 &= \{z \mid \theta_1 = \theta_2, \theta_2 \in [-\pi, \pi), \omega_1 = 0, \omega_2 \in \mathbb{R}, \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2}\}, \\ I_2 &= \{z \mid \theta_1 = \theta_2, \theta_2 \in [-\pi, \pi), \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 = -\omega_1 r_1 \frac{r_2 m_1 + r_1 (m_1 + m_2)}{r_2 (r_1 m_2 - r_2 m_1)}\}, \\ I_3 &= \{z \mid \theta_1 = \theta_2 + \pi, \theta_2 \in [-\pi, \pi), \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 = -\omega_1 r_1 \frac{r_2 m_1 - r_1 (m_1 + m_2)}{r_2 (r_1 m_2 + r_2 m_1)}\}, \\ I_4 &= \{z \mid \sum_{k=0}^4 \gamma_k \cos^k(\theta_1 - \theta_2) = 0, \theta_i \in [-\pi, \pi), \\ &\quad \omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 = \omega_1 r_1 \frac{r_2 m_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + r_1 (m_1 + m_2)}{r_2 [m_1 r_2 - r_1 m_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]}\} \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= r_1 r_2^2 m_1 (m_1 - m_2) (m_2 + m_1)^2, \\ \gamma_1 &= r_2 (m_1 + m_2) [r_1^2 m_2 (m_1 - m_2) (m_1 + m_2) + r_2^2 m_1^2 (m_1 - 3m_2)] \\ \gamma_2 &= -2 r_1 m_2 (m_1 + m_2) [r_1^2 m_2 (m_1 + m_2) + r_2^2 m_1 (m_1 - 3m_2)] \\ \gamma_3 &= -r_2 m_2 [3 r_1^2 m_2 (m_1 + m_2)^2 + r_2^2 m_1^2 (m_1 - m_2)] \\ \gamma_4 &= -m_1 r_1 r_2^2 m_2^2 (m_1 + m_2). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Note-se que todos os elementos da intersecção têm dimensão 2.

Por facilidade de notação, seja

$$c = \frac{r_2^2 m_1 - r_1^2 (m_1 + m_2)}{r_1 r_2 (m_1 + m_2)}$$

e estude-se a invariância de cada um dos conjuntos $I_j; j = 1, \dots, 4$.

$S_1 : \theta_1 - \theta_2 = 0$ e $\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2}$. Uma vez que $\omega_1 = 0$, tem-se

$$X_1 \cdot S_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

$$X_3 \cdot S_1 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = c.$$

Assim, os elementos de S_1 invariantes por X_1 e X_3 definem os conjuntos

$$I_{11} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0\} \quad \text{e}$$

$$I_{13} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = 0, \cos(\theta_1 - \theta_2) = c, \omega_1 = 0\} = \{z | c = 1, \omega_1 = 0\}.$$

Note-se que o conjunto I_{13} é, na realidade, um conjunto vazio. Com efeito, de $c = 1$ e da igualdade $m_1/m_2 = r_1/r_2$ vem

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2^2 - r_1(r_1 + r_2)} \Rightarrow r_1 = 0 \vee r_1 = -2r_2.$$

Análise-se, então, o conjunto I_{11} .

$S_{11} : \omega_2 = 0$. Tem-se

$$X_2 \cdot S_{11} = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = -r_1 \frac{m_1 + m_2}{r_2 m_1} \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = -\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) < -1,$$

já que $m_1/m_2 = r_1/r_2$. Ou seja, é sempre possível abandonar S_{11} usando o campo X_2 . Conclui-se, assim, que é sempre possível sair da região S_1 usando o campo X_2 .

Análise-se, agora, o conjunto I_2 .

$S_2 : \theta_1 - \theta_2 = 0$ e $\frac{m_1}{m_2} \neq \frac{r_1}{r_2}$. Aqui tem-se

$$\omega_2 = \omega_1 r_1 \frac{r_2 m_1 + r_1(m_1 + m_2)}{r_2(r_2 m_1 - r_1 m_2)}. \quad (\text{B.6})$$

Além disso,

$$X_1 \cdot S_2 = 0 \Rightarrow \Delta(\theta) \omega_1 - \omega_2 = 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 0 \quad \vee \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2^2 - r_1(r_1 + r_2)} \quad \text{por (B.6)}$$

$$X_3 \cdot S_2 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = c.$$

Os elementos de S_2 invariantes por X_1 e X_3 definem os conjuntos

$$I_{21} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = 0, \omega_1 = 0, \omega_2 = 0\},$$

$$I_{22} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = 0, \frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1(r_1 + r_2)}{r_2^2 - r_1(r_1 + r_2)}, \omega_2 = \omega_1 r_1 \frac{r_2 m_1 + r_1(m_1 + m_2)}{r_2(r_2 m_1 - r_1 m_2)}\} \quad \text{e}$$

$$I_{23} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = 0, \cos(\theta_1 - \theta_2) = c\}.$$

$S_{21} : \omega_2 = 0$. Tem-se

$$X_2 \cdot S_{21} = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = -\frac{r_1(m_1 + m_2)}{r_2 m_1}.$$

De $\theta_1 - \theta_2 = 0$ resulta uma condição impossível: $\frac{m_1}{m_2} = -\frac{r_1}{r_1+r_2} < 0$. Então I_{21} não é invariante por X_2 .

$S_{22} : \omega_1 - \omega_2 = 0$. Usando o facto de $\theta_1 - \theta_2 = 0$ vem

$$X_1 \cdot S_{22} = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Sejam então

$$I_{221} = \{z | \theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \omega_1 - \omega_2 = 0\} \quad \text{e} \quad I_{222} = \{z | \theta_1 = \theta_2 = -\frac{\pi}{2}, \omega_1 - \omega_2 = 0\}$$

$S_{221} : \theta_1 - \frac{\pi}{2} = 0$. Aqui

$$X_3 \cdot S_{221} = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = \frac{r_2 m_1}{r_1 m_2}.$$

Uma vez que $\theta_1 - \theta_2 = 0$ ter-se-ia $m_1/m_2 = r_1/r_2$.

Usando o mesmo raciocínio para I_{222} conclui-se que é sempre possível abandonar S_{22} .

$S_{23} : \theta_1 - \theta_2 = 0$. Neste caso, vem $c = 1$, isto é

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1 (r_1 + r_2)}{r_2^2 - r_1 (r_1 + r_2)}.$$

Assim, o sistema abandona S_2 excepto se

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1 (r_1 + r_2)}{r_2^2 - r_1 (r_1 + r_2)}. \quad (\text{B.7})$$

Esta condição representa um (conjunto de) sistema(s) em particular.

Considere-se, agora, o conjunto I_3 .

$S_3 : \theta_1 - \theta_2 = \pi$. Nesta região tem-se

$$\omega_2 = -\omega_1 r_1 \frac{r_2 m_1 - r_1 (m_1 + m_2)}{r_2 (r_2 m_1 + r_1 m_2)}. \quad (\text{B.8})$$

Além disso,

$$\begin{aligned} X_1 \cdot S_3 &= 0 \Rightarrow \omega_1 - \omega_2 = 0 \\ X_3 \cdot S_3 &= 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = c \end{aligned}$$

e os elementos de S_3 invariantes por X_1 e X_3 definem os conjuntos

$$I_{31} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = \pi, \omega_1 - \omega_2 = 0\} \quad \text{e} \quad I_{32} = \{z | \theta_1 - \theta_2 = \pi, \cos(\theta_1 - \theta_2) = c\}.$$

$S_{31} : \omega_1 - \omega_2 = 0$. Tem-se

$$X_1 \cdot S_{32} = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}.$$

De $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ vem $\theta_2 = \mp \frac{\pi}{2}$. Sejam então

$$I_{321} = \{z | \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = -\frac{\pi}{2}, \omega_1 - \omega_2 = 0\} \quad \text{e} \quad I_{322} = \{z | \theta_1 = -\frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{2}, \omega_1 - \omega_2 = 0\}$$

$S_{321} : \theta_1 - \frac{\pi}{2} = 0$. De $X_3 \cdot S_{321} = 0$ vem $m_1/m_2 = -r_1/r_2$, que é uma condição impossível. Para I_{322} resulta uma condição igualmente impossível, pelo que é sempre possível abandonar I_{32} .

$S_{33} : \theta_1 - \theta_2 = \pi$. Neste caso, como vem $c = -1$, isto é

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1 (r_1 - r_2)}{r_2^2 - r_1 (r_1 - r_2)}. \quad (\text{B.9})$$

Desta forma o sistema abandona S_3 excepto se satisfizer a igualdade (B.9).

$S_4 : \sum_{k=0}^4 \gamma_k \cos^k(\theta_1 - \theta_2) = 0$. Esta condição é equivalente a

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = x_k$$

sendo $x_k; k = 1, \dots, 4$ as quatro raízes, possivelmente não todas reais, da equação

$$\gamma_4 x^4 + \gamma_3 x^3 + \gamma_2 x^2 + \gamma_1 x + \gamma_0 = 0$$

com os parâmetros $\gamma_k; k = 0, \dots, 4$ definidos em (B.5).

$S'_4 : \cos(\theta_1 - \theta_2) - x_k = 0$. Vem

$$X_1 \cdot S'_4 = 0 \Rightarrow \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \vee \omega_1 - \omega_2 = 0$$

$$X_3 \cdot S'_4 = 0 \Rightarrow \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0 \vee \cos(\theta_1 - \theta_2) = c$$

e as novas sub-regiões de invariância são definidas pelos conjuntos

$$I_{41} = \{z \mid \cos(\theta_1 - \theta_2) = x_k, \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0\}, I_{42} = \{z \mid \cos(\theta_1 - \theta_2) = x_k, \omega_1 - \omega_2 = 0\}$$

e

$$I_{43} = \{z \mid \cos(\theta_1 - \theta_2) = x_k, \cos(\theta_1 - \theta_2) = c\}.$$

Observe-se que I_{41} corresponde a ter $x_k^2 = 1$. Substituindo na equação da qual é raiz obtêm-se duas condições

$$\gamma_4 \pm \gamma_3 + \gamma_2 \pm \gamma_1 + \gamma_0 = 0$$

$S_{42} : \omega_1 - \omega_2 = 0$. Para X_2 vem

$$X_2 \cdot S_{42} = 0 \Rightarrow \cos(\theta_1 - \theta_2) = c.$$

Uma vez que $\cos(\theta_1 - \theta_2) = x_k$ vem $x_k = c$. Substituindo na equação da qual é raiz obtém

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2}.$$

Não é necessário considerar o conjunto I_{43} por ser descrito pela condição $\cos(\theta_1 - \theta_2) = c$, sendo então, a conclusão análoga.

O sistema abandona S_4 excepto para se verifica as igualdades:

$$\gamma_4 \pm \gamma_3 + \gamma_2 \pm \gamma_1 + \gamma_0 = 0 \quad \text{ou} \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2}. \quad (\text{B.11})$$

Conclui-se, então, que o sistema abandona a intersecção Σ sempre que não verifique as igualdades:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1 (r_1 \pm r_2)}{r_2^2 - r_1 (r_1 \pm r_2)}, \quad \text{cf. (B.7) e (B.9)}$$

$$\gamma_4 \pm \gamma_3 + \gamma_2 \pm \gamma_1 + \gamma_0 = 0 \quad \text{cf. (B.10) \quad e}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2} \quad \text{cf. (B.11).}$$

Referências bibliográficas

- [Adr95] L.Ya. Adrianova. *Introduction to linear systems of differential equations*, volume 146 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1995.
- [AF03] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev Spaces*, volume 140 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, 2 edition, 2003.
- [AG79] A.A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze. The exponential representation of flows and the chronological calculus (russian). *Math. USSR, Sb.*, 35(6):727–785, 1979. Translation from: *Mat. Sb.* 107 pp. 467-532 (1978).
- [AG81] A.A. Agrachev and R.V. Gamkrelidze. Chronologica algebras and nonstationary vector fields. *Journal of Soviet Mathematics*, (17):1650–1675, 1981. Translation from: *Itogi Nauki i Tekhniki, Seriya Problemy Geometrii*, Vol. 11, pp. 135-176, 1980.
- [AGS89] A.A. Agrachev, R.V. Gamkrelidze, and A.V. Sarychev. Local invariants of smooth control systems. *Acta Applicandae Mathematicae*, 14(3):191–237, 1989.
- [Arn85] V.I. Arnold. *Equações diferenciais ordinárias*. Editora Mir, Moscovo, 1985.
- [Arn88] V.I. Arnold. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*, volume 250 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer, New York, 2 edition, 1988.
- [Arn89] V.I. Arnold. *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, New York, 1989.
- [AS87] A.A. Agrachev and A.V. Sarychev. On reduction of a smooth system linear in the control. *Math. USSR Sbornik*, 58(1):15–30, 1987. translation from *Mat. Sb.*, Nov. Ser. 130(172), No.1, 18-34 (1986).
- [AS04] A.A. Agrachev and Yu.L. Sachkov. *Control theory from the geometric viewpoint*, volume 87 of *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*. Springer, 2004.
- [AS05] A.A. Agrachev and A.V. Sarychev. Navier-Stokes equations: controllability by means of low modes forcing. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 7(1):108–152, 2005.
- [AS06] A.A. Agrachev and A.V. Sarychev. Controllability of 2D Euler and Navier-Stokes equations by degenerate forcing. *Communications in Mathematical Physics*, 265(3):673–697, 2006.

- [AV83] A.A. Agrachev and S.S. Vakhrameev. Chronological series and the Cauchy-Kowalevski theorem. *Journal of Soviet Mathematics*, 21:231–250, 1983.
- [BBM86a] R.E. Bellman, J. Bentsman, and S.M. Meerkov. Vibrational control of nonlinear systems: Vibrational controllability and transient behavior. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31:717–724, 1986.
- [BBM86b] R.E. Bellman, J. Bentsman, and S.M. Meerkov. Vibrational control of nonlinear systems: Vibrational stabilizability. *IEEE Trans. Autom. Control*, 31:710–716, 1986.
- [BGG02] M.V. Bartuccelli, G. Gentile, and K.V. Georgiou. On the stability of the upside-down pendulum with damping. *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, Math. Phys. Eng. Sci.*, 458(2018):255–269, 2002.
- [Bir99] G.D. Birkhoff. *Dynamical systems. With an addendum by Jurgen Moser (reprint)*. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. IX American Mathematical Society, Providence, R.I., 1999.
- [BJ82] Th. Bröcker and K. Jänich. *Introduction to differential topology*. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.
- [Ble00] I. Blekhman. *Vibrational mechanics: nonlinear dynamic effects, a general approach, applications*. World Scientific, Singapore, 2000.
- [BM61] N.N. Bogoliubov and Yu.A. Mitropolsky. *Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations*. International Monographs on Advanced Mathematics and Physics. Translated from the second revised Russian edition. Hindustan Publishing Corp., Delhi, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1961.
- [Bro76] R.W. Brockett. Volterra series and geometric control theory. *Automatica*, 12:167–176, 1976.
- [BT82] R. Bott and W.L. Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Graduate Texts in Mathematics, 82. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XIV, 1982.
- [Cor99] J.-M. Coron. On the stabilization of some nonlinear control systems: Results, tools, and applications. In F. H. Clarke and R. J. Stern, editors, *Nonlinear analysis, differential equations and control. Proceedings of the NATO Advanced Study Institute and séminaire de mathématiques supérieures, Montréal, Canada, July 27-August 7, 1998.*, volume 528 of *NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci.*, pages 307–367, Dordrecht, 1999. Kluwer Academic Publishers.
- [CS05a] M.I. Caiado and A. Sarychev. On asymptotic stabilization of elastic systems. In *Physics and Control, 2005. Proceedings. 2005 International Conference 24-26 Aug. 2005*, pages 383–388. IEEE, 2005.
- [CS05b] M.I. Caiado and A.V. Sarychev. Remarks on stability of inverted pendula. *Raconti del Seminario del Politecnico di Torino*, 63(4):333–347, 2005.
- [Flo83] G. Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure Sér. 2*, 12:47–88, 1883.

- [GAV91] R.V. Gamkrelidze, A.A. Agrachev, and S.A. Vakhrameev. Ordinary differential equations on vector bundles and chronological calculus. *Journal of Soviet Mathematics*, 55(4):1777–1848, 1991. Translation from: Itogi Nauki Tekhniki, Seriya Sovremennye Problemy Matematiki, Noveishie Dostizheniya Vol 35, pp. 3– 107.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. Academic Press, San Diego, 1974.
- [Jur97] V. Jurdjevic. *Geometric control theory*, volume 51 of *Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge, 1997.
- [Kol03] Yu.S. Kolesov. A stability criterion for elastic systems under multifrequency vibrations. *Doklady Mathematics*, 68(2):294–296, Translated from Doklady Akademii Nauk, Vol.392, No. 6, 2003, pp. 740-742 2003.
- [Lad85] O.A. Ladyzhenskaya. *The boundary value problems of mathematical physics*, volume 49 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Lan72] S. Lang. *Differential manifolds*. Series in Mathematics. Addison-Wesley, 1972.
- [Mac91] A. Machado. *Introdução à análise funcional*. Escolar Editora, 1991.
- [Mag54] W. Magnus. On the exponential solution of differential equations for a linear operator. *Communications on pure and applied mathematics*, 8:649–673, 1954.
- [Mee80] S.M. Meerkov. Principle of vibrational control: theory and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(4):755–762, August 1980.
- [Mee82] S.M. Meerkov. Condition of vibrational stabilizability for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(2):485–487, April 1982.
- [Mil97] J.W. Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. Princeton University Press, New Jersey, 1997.
- [Mur84] J.D. Murray. *Asymptotic analysis*, volume 48 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1984.
- [Roc03] E.A. Rocha. *Uma abordagem algébrica à teoria de controlo não linear*. PhD thesis, Universidade de Aveiro, 2003.
- [Rud91] W. Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, New York, 2 edition, 1991.
- [Sar01a] A.V. Sarychev. Lie-and chronological-algebraic tools for studying stability of time-varying systems. *Systems and Control Letters*, 43(1):59–76, 2001.
- [Sar01b] A.V. Sarychev. Stability criteria for time-periodic systems via high-order averaging techniques. In A. Isidori, F. Lamnabhi-Lagarrique, and W. Respondek, editors, *Nonlinear Control in the Year 2000*, volume 2 of *Lecture notes in control*, pages 365–377, London, 2001. Springer-Verlag.

-
- [SELF01] A.S. Shiriaev, O. Egeland, H. Ludvigsen, and A.L. Fradkov. Vss-version of energy-based control for swinging up a pendulum. *Systems and Control Letters*, 44(1):45–56, 2001.
- [Shi06] A. Shirikyan. Approximate controllability of three-dimensional navier-stokes equations. *Communications in Mathematical Physics*, 266(1):123–151, 2006.
- [SV85] J.A. Sanders and F. Verhulst. *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied Mathematical Sciences, 59. New York etc.: Springer-Verlag, 1985.
- [Tre98] A.I. Tretyak. Chronological calculus, high-order necessary conditions for optimality, and perturbation methods. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 4(1):77–126, 1998.
- [Ver90] F. Verhulst. *Nonlinear differential equations and dynamical systems*. Universitext. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1990.
- [War83] F.W. Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, volume 94 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, 1983.
- [Was02] W. Wasow. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Reprint (of the ed. publ. 1976 by Robert E. Krieger Publ. Co., Huntington, N.Y.), New York: Dover Publications, Inc., 2002.

Índice Remissivo

A

álgebra
 cronológica, 41
 de Lie, 5, 19
 real, 17
Adams, R.A., 68
Adrianova, L.Ya., 47
Agrachev, A.A., i, 3, 4, 19, 20, 22, 23,
 26–29, 32, 33, 36–38, 40–42, 44, 55,
 60, 81, 83, 84
Arnold, V.I., 33, 47, 55
assimptótica
 análise, 3
 expansão, 3, 28, 90
 série, 3
 sucessão, 90
assimptótico, método, 3
assimptoticamente igual, 89
atlas, 7

B

Bachmann, P., 89
Bellman, R.E., 51, 53, 55
Bentsman, J., 51, 53, 55
Birkhoff, G.D., 1
Blekhman, I., 4, 55
Bogoliubov, N.N., 2, 3, 49, 50
Bott, R., 16
Bröcker, Th., 7
Brockett, R., 4

C

$C^\infty(V)$, 16
 topologia de, 17
Cauchy, problema, 24
conjunto atingível, 83
cálculo cronológico, 19
Caiado, M.I., 27, 55, 67

campo vectorial, 12
 compatível, 84
 completo, 24
 não autónomo, 23
 quase-autónomo, 32
carta, 7
 orientada positivamente, 16
conjunto fundamental de soluções, 46
controlabilidade, 1, 5, 50
controlo, 1
 feedback, 68
 output feedback, 77
 state feedback, 5, 70
 por *feedforward*, 51
 por *feedback*, 51
 realimentado, 68
 teoria matemática do, 1
 vibracional, 51
Coron, J.-M., 77
cronológica
 identidade, 41
 série, 26
cronológico
 cálculo, 3, 19
 produto, 42

D

derivação, 11
difeomorfismo, 9
diferenciável
 aplicação, 9
 estrutura, 8
 variedade, 8
diferencial, aplicação, 11

E

Egeland, O., 55
equação da onda, 67

- equilíbrio
 ponto de, 45
 instável, 45
 solução de, 45
 equilíbrio estável, 45
 assimptoticamente, 45
 uniformemente, 45
 escala de tempo, 49
 espaço dual, 10
 espaço topológico
 de Hausdorff, 7
 paracompacto, 7
 estabilidade, 1, 69
 exponencial, 69
 de Poisson, 83
 teorema da, 48
 estabilizável
 parcialmente, 53
 totalmente, 53
 vibracionalmente, 51
 vibracionalmente,, 52
 estabilização, 50
 Euler, L., 81
 exponencial
 cronológica à direita, 25
 cronológica à esquerda, 26
- F
- Fréchet, espaço de, 17
 fórmula
 da variação das constantes, 33
 de Baker-Campbell-Hausdorff, 3
 de Ostrogradsky-Jacobi-Liouville, 47
 família
 bracket generating, 5
 absolutamente contínua, 17
 BG, 5, 84
 Lipschitziana, 22
 localmente finita, 7
 localmente integrável, 17
 localmente limitada, 17, 22
 mensurável, 17
 Floquet, G., 3
 fluxo, 23
 forma
 de volume, 15
 diferencial, 15
- exterior, 14
 Fourier, J.B., 70
 Fournier, J.J.F., 68
 Fradkov, A.L., 55
- G
- Galerkin
 aproximação de, 4, 74
 Galerkin, B., 4
 Galilei, G., 2
 Gamkrelidze, R.V., i, 3, 4, 19, 23, 26,
 28, 29, 32, 33, 36–38, 40–42, 44, 60
 Gauss, C.F., 2
- H
- Hausdorff, F., 7, 8
 Helmholtz, H., 2
 Hermann, R., 5, 84, 86
 Huygens, C., 2
- J
- Jänich, K., 7
 Jurdjevic, V., 81, 83
- K
- Kolesov, Yu.S., 79
 Krylov, N.M., 3
- L
- Ladyzhenskaya, O.A., 67, 69
 Lagrange, J.L., 2, 3, 81
 Landau, E., 89
 Lang, S., 7
 Laplace, P.S., 2
 Laurent, P.A., 38
 Leibniz, regra de, 11
 Lie
 álgebra, 14, 83
 derivada, 21
 parêntesis, 14
 linear
 perturbação, 4
 Liouville, J., 83, 85
 logaritmo
 cronológico à direita, 29
 cronológico à esquerda, 29
 não cronológico, 36
 Ludvigsen, H., 55

- Lyapunov
 estabilidade de, 45
 transformação de, 3, 48
Lyapunov, A.M., i, 1, 3, 4
- M
- média, 49
- Machado, A., 8
- Magnus, W., 4
- matriz
 de monodromia, 47, 57
 fundamental, 46
- mecânica
 celeste, 2
- medianização
 de ordem 1, 49
 método da, 48
 princípio da, 3, 49
- Meerkov, S.M., 4, 51–55
- mergulho, 9
- Milnor, J.W., 7
- Mitropolsky, Y.A., 2, 49, 50
- monodromia
 transformação de, 4
- movimento
 vibracional, 4
 oscilatório, 2
- multiplicador, 47
- Murray, J.D., 89
- Murray, J.W., 3
- N
- Nagano, T., 5, 84, 86
- Newton, I., 2
- O
- órbita, 83
- observabilidade, 51
- orientação, 15
- oscilação
 pequena, 55
- Ostrogradsky, M.V., 2
- P
- pull-back*, 9
- pêndulo, 4
 esférico, 4
 duplo, 56
- duplo planar, 4
- esférico duplo, 65
- esférico simples, 64
- invertido, 55
- matemático, 55
- num kart, 5
- paramétrico, 4
- palavra regular, 40
- parametrização, 8
- partições da unidade, 16
- perturbação
 pequena, 2
- Poincaré, H., 1, 3, 82, 83
- Poisson, S.D., 2, 82, 83
- polinómio comutador, 40
- problema
 dos dois corpos, 2
 dos três corpos, 2
- R
- Rayleigh, Lord, 2
- realização, 50
- Rocha, E.A., 29
- Rudin, W., 17
- S
- Sachkov, Yu.L., 19, 20, 22, 27, 28, 81, 83, 84
- Sanders, J.A., 49, 50
- Sarychev, A.V., 3, 19, 27, 36, 37, 42, 48, 55, 67
- Shiriaev, A.S., 55
- Shirikyan, A., 19
- sistema
 elástico, 4
 controlável, 50
 de coordenadas, 7
 elástico, 68
 invariante, 52
 medianizado, 49
 robusto, 33
- solução clássica, 69
- suporte
 de uma k -forma, 16
- T
- tangente
 aplicação, 11

- espaço, 5, 10
- espaço co-, 10
- fibrado, 10
- fibrado co-, 10
- vector, 9

Teorema

- Whitney, 9

teorema

- de Floquet, 47
- de Hermann-Nagano, 81, 84
- de Liouville, 83
- de Poincaré, 83

teoria

- da medianização, 3
- das oscilações lineares, 2
- das oscilações não lineares, 3
- de Floquet, 3
- geométrica do controlo, 5, 81
- matemática do controlo, 1
- qualitativa, 1

- termo secular, 2

- Tretyak, A.I., 19

- Tu, W.L., 16

V

- Vakhrameev, S.A., 19

- Van-der-Pol, B., 2

variedade, 5

- diferenciável, 8
- orientável, 15
- orientada, 15
- sub-, 8

vector

- co-, 10
- tangente, 9

- velocidade angular, 36

- Verhulst, F., 3, 49, 50

vibração

- não harmónica, 4

vibracionalmente

- controlável, 52
- estabilizável, 51, 52

Volterra

- série de, 3, 26

- Volterra, V., 3

volume, 14

- forma de, 15

W

- Warner, F.W., 7

- Wasow, W., 89

- Whitney, H., 9